# Meccanica Quantistica - A.A. 2012/2013

Prova scritta - 28.06.2013

Per MQI risolvere il Problema 1;
Per MQII e per il corso annuale di MQ risolvere Problema 1, 1)-3), e Problema 2.

Tempo disponibile: 3 ore

## Problema 1

1) Si scriva l'operatore $T(\mathbf{k})$ che trasla l'impulso di una particella di $\mathbf{k}$: e.g., da $\mathbf{p}$ a $\mathbf{p}+\mathbf{k}$.

Il deutone può essere considerato in prima approssimazione come un (unico) sistema legato $p-n$ in una buca di potenziale in onda $S$. Sia $-\varepsilon$ l'energia di legame. Supporremo nel seguito che il raggio d'azione della forza $p-n$ sia molto piccolo, cioè che la funzione d'onda dello stato legato possa essere approssimata dalla sua forma all'esterno della buca di potenziale. Si assumano $m_p = m_n$.

2) Nell'approssimazione detta sopra si scriva la funzione d'onda dello stato legato di deutone.

3) Il protone della coppia $p-n$ riceve per urto una velocità $v$. L'urto è molto veloce. Qual'è la probabilità di disintegrazione del deutone in questo processo? (Fig. 1) Discutere i limiti $v \to 0$ e $v \to \infty$ della detta probabilità.

4) Supponiamo che il deutone si sia disintegrato a causa dell'urto ricevuto a $t = 0$. Dopo un tempo $t$ qual'è il valor medio $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$ dell'elettrone del *deuterio*, che era nello stato fondamentale prima dell'urto? (Fig. 2)

## Problema 2

Un fascio di particelle neutre con momento magnetico $\mu$ si muove *di moto rettilineo uniforme lungo l'asse x, con velocità v,* soggette ad un campo magnetico $B_0$ diretto lungo l'asse $z$. Le particelle hanno spin 1/2 e sono nell'autostato con $s_z = -1/2$.

Nell'intorno al punto $x = 0$ si trova un campo magnetico lungo l'asse $y$ schematizzabile con

$$B_y = B_1 \exp(-|x|/a) \cos(\omega t)\,; \qquad B_1 \ll B_0$$

Questa zona è indicata nel seguito come "apparato sperimentale". *N.B.*: il moto delle particelle in direzione $x$ è qui trattato classicamente, con $x \equiv vt$.

1) Si calcoli in teoria perturbativa in $B_1$ qual'è la probabilità di inversione dello spin nell'attraversare l'apparato sperimentale.

2) Si spieghi come la dipendenza da $\omega$ del risultato possa essere utilizzata per una misura di $\mu$ e si indichi come l'errore sulla misura dipende dalla lunghezza $a$.

3) Si supponga di costrurire un esperimento in cui l'apparato precedente venga ripetuto a distanza $b \gg a$, prima si faccia il caso di una sola ripetizione e poi di $N$ ripetizioni: cosa cambia rispetto alla precisione della misura?

Formule utile: $$\int d^3\mathbf{x}\,\frac{1}{r^2} e^{-\beta r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} = \frac{2\pi^2}{q} - \frac{4\pi}{q} \arctan(\frac{\beta}{q})$$

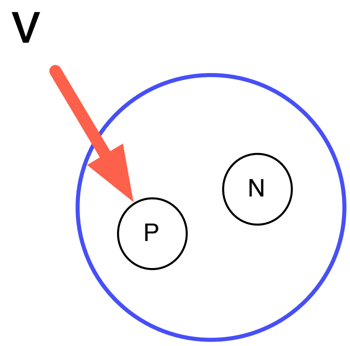


Figura 1: Deutone

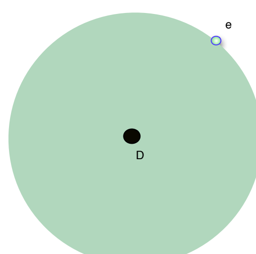


Figura 2: Deuterio

# Soluzioni

## Problema 1

**1)** L'operatore che aggiunge (trasla) l'impulso di una quantità $\mathbf{p}_1$ è

$$T(\mathbf{p}_1) = e^{i\mathbf{p}_1\mathbf{x}/\hbar},$$

in analogia con il noto operatore che trasla la posizione $\mathbf{x}$ di $\mathbf{x}_0$ ,

$$\hat{T}(\mathbf{r}_0) = e^{-i\hat{\mathbf{p}}\mathbf{x}_0/\hbar}.$$

La cosa si verifica immediatamente in rappresentazione degli impulsi:

$$e^{i\mathbf{p}_1\mathbf{x}/\hbar}\varphi(\mathbf{p}) = \exp(-\mathbf{p}_1\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}})\varphi(\mathbf{p}) = \varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1) \tag{1}$$

Ad esempio se $\varphi$ è una funzione piccata attorno al valore nullo del suo argomento, lo stato trasformato descrive uno stato con impulso $\mathbf{p}_1$.

Oppure, più banalmente, lavorando nella rappresentazione delle coordinate, l'operatore $T(\mathbf{p}_1) = e^{i\mathbf{p}_1\mathbf{x}/\hbar}$, agendo su un autostato dell'impulso con autovalore $\mathbf{p}$,

$$e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar}$$

dà luogo ad uno stato

$$e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar} \to T(\mathbf{p}_1)\,e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar} = e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{p}_1)\mathbf{x}/\hbar},$$

che è un autostato dell'impulso con autosalone $\mathbf{p}+\mathbf{p}_1$ !

In generale, una qualsiasi funzione d'onda può essere espressa come combinazione lineare di onde piane (autostati dell'impulso); ogni componente in $\mathbf{p}$ riceve lo suddetto spostamento. Cioè

$$\psi(\mathbf{r}) = \int d^3p\,\varphi(\mathbf{p})\,e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar} \tag{2}$$

$$\to T(\mathbf{p}_1)\psi(\mathbf{r}) = \int d^3p\,\varphi(\mathbf{p})\,e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{p}_1)\mathbf{x}/\hbar} = \int d^3p\,\varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\,e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar} \tag{3}$$

che riproduce la (1).

**2)** Per una stato legato in onda $S$ la funzione d'onda asintotica è, con le notazioni del testo:

$$\psi(\mathbf{x}) = A\frac{1}{r}e^{-\alpha r}; \qquad \alpha = \sqrt{2\mu\varepsilon}/\hbar$$

$\mu$ è la massa ridotta del sistema. La condizione di normalizzazione impone

$$4\pi A^2\frac{1}{2\alpha} = 1 \tag{4}$$

**4)** Lo stato iniziale del sistema è

$$\Psi(\mathbf{R},\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{P}\mathbf{R}/\hbar)\psi(r) \tag{5}$$

Indichiamo con $1,2$ il protone ed il neutrone. $\mathbf{R}$ è la coordinata del centro di massa e $\mathbf{P}$ l'impulso del centro di massa (si suppongono uguali le masse delle due particelle)

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_1}{2}; \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$
$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{r}; \qquad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{r}$$

Per quanto visto al punto 1 la funzione immediatamente dopo l'urto è approssimabile dalla forma

$$\Psi_f = e^{im\mathbf{v}\mathbf{r}_1/\hbar} e^{i\mathbf{P}\mathbf{R}/\hbar} \psi(r) = e^{i(m\mathbf{v}+\mathbf{P})\mathbf{R}} e^{i\frac{m}{2}\mathbf{v}\mathbf{r}/\hbar} \psi(r) \tag{6}$$

In totale il sistema ha acquisito un impulso $m\mathbf{v}$ quindi l'impulso finale dovrebbe essere

$$\mathbf{P}_f = \mathbf{P} + m\mathbf{v}$$

e confrontando con l'espressione precedente si deduce che la funzione d'onda relativa dopo l'urto è

$$\psi_f = \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})\,\psi(r), \qquad \mathbf{q} \equiv m\mathbf{v}/2\ .$$

La probabilità che non si ionizzi vale

$$P_0 = \left| \int \psi^2(r) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \right|^2 = A^2 \left[ \frac{2\pi^2}{q} - \frac{4\pi}{q} \arctan(\frac{2\alpha}{q}) \right] \tag{7}$$

e la probabilità di disintegrazione è

$$1 - P_0$$

in quanto il solo stato legato è quello indicato sopra. Un modo alternativo di verificare l'affermazione è di scrivere le funzioni d'onda del continuo normalizzate in un volume $V$.

Come verifica, non è difficile dimostrare che nel limite di piccola velocità, i.e., $q \to 0$, (il limite adiabatico), $P_0 \to 1$, utilizzando

$$\arctan \frac{\beta}{q} \simeq \frac{\pi}{2} - \frac{q}{\beta}, \qquad q \simeq 0,$$

nella (7), e ricordando la (4). Questo è consistente, come si vede direttamente dalla (7):

$$P_0 = \left| \int \psi^2(r) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \right|^2 \to \left| \int \psi^2(r) \right|^2 = 1. \tag{8}$$

$P_0$ tende a 0 invece nel limite opposto, $q \to \infty$.

Dopo la disintegrazione del deutone, il deuterio (l'elettrone) resta senza il protone, e non sarà più legato. Tuttavia a $t = 0+$ la funzione d'onda resta quella del deuterio legato,

$$\psi_0 = \frac{r_B^{-3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-r/r_B}$$

Per calcolare $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$ all'istante $t$, conviene utilizzare lo schema di Heisenberg,

$$\langle \psi(t) | \mathbf{r}^2 | \psi(t) \rangle = \langle | \psi(0) | \mathbf{r}_H^2 | \psi(0) \rangle\ ,$$

dove

$$\mathbf{r}_H = e^{iHt/\hbar} \mathbf{r} e^{-iHt/\hbar},$$

ma visto che il sistema è ora libero,

$$\mathbf{r}_H = e^{ip^2t/2m\hbar} \mathbf{r} e^{-ip^2t/2m\hbar} = e^{ip^2t/2m\hbar} i\hbar \nabla_p e^{-ip^2t/2m\hbar} = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{m} t$$

(doce abbiamo utilizzato la rappresentazione degli impulsi per convenienza). Dunque

$$\langle \psi(t) | \mathbf{r}^2 | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | \mathbf{r}_H^2 | \psi(0) \rangle = \langle \psi(0) | \left( \mathbf{r}^2 + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{m} t + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} t^2 \right) | \psi(0) \rangle.$$

Il secondo termine si annulla, mentre

$$\langle\psi(0)|\mathbf{r}^2|\psi(0)\rangle = 3\,r_B^2,$$

$$\langle\psi(0)|\mathbf{p}^2|\psi(0)\rangle = 2m\,\langle\psi(0)|H+\frac{e^2}{r}|\psi(0)\rangle = 2m\left(-\frac{e^2}{2r_B}+\frac{e^2}{r_B}\right) = \frac{me^2}{r_B}\,,$$

perciò

$$\langle\psi(t)|\mathbf{r}^2|\psi(t)\rangle = 3\,r_B^2 + \frac{e^2}{m\,r_B}\,t^2.$$

## Problema 2

La particella si muove di moto rettilineo e possiamo trascurare l'influsso sul moto del campo magnetico, quindi possiamo porre $x = vt$.

L'Hamiltoniana del sistema, relativa allo spin, è:

$$H = -\mu B_0 s_z - \mu B_y(t) s_y = -\frac{1}{2}\mu B_0 \begin{pmatrix} 1 & -i\frac{B_1}{B_0}e^{-v|t|/a}\cos(\omega t) \\ i\frac{B_1}{B_0}e^{-v|t|/a}\cos(\omega t) & -1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Porremo $\hbar\omega_0 = \mu B_0,\,,\,\hbar\omega_1 = \mu B_1$.

Lo stato iniziale e finale hanno energia

$$E_i = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\,; \qquad E_f = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0$$

L'ampiezza di probabilità per passare dallo stato $i$ allo stato $f$ è

$$a_{fi} = -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(E_f-E_i)} V_{fi}(t)\,dt = -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 t} V_{21}(t)\,dt$$

Nel fare l'integrale possiamo limitarci al termine risonante ottenendo

$$a_{fi} = \frac{1}{4}\mu B_1 \frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 t} e^{-v|t|/a} e^{i\omega t} = \frac{1}{4}\omega_1 \frac{2v/a}{(\omega-\omega_0)^2 + v^2/a^2} \tag{10}$$

e quindi per la probabilità

$$P_{i\to f} = \frac{\omega_1^2}{4}\frac{v^2}{a^2}\frac{1}{((\omega-\omega_0)^2+v^2/a^2)^2} \tag{11}$$

Il risultato è una curva risonante per $\omega = \omega_0$ quindi misurando la frequenza di risonanza si ha una misura del momento magnetico $\mu$. In prossimità della risonanza possiamo scrivere

$$((\omega-\omega_0)^2+v^2/a^2)^2 \simeq \frac{v^4}{a^4} + 2(\omega-\omega_0)^2\frac{v^2}{a^2} = 2\frac{v^2}{a^2}\left((\omega-\omega_0)^2 + \frac{v^2}{2a^2}\right)$$

quindi

$$P_{i\to f} = \frac{\omega_1^2}{8}\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2 + \frac{v^2}{2a^2}} \tag{12}$$

che è una Lorentziana con larghezza

$$\Gamma = \sqrt{2}\frac{v}{a}$$

che dà l'ordine di grandezza l'incertezza sulla misura.

Attorno a $x = b$ il campo magnetico è

$$B_1 e^{-|x-b|/a}\cos\omega t \to B_1 e^{-|vt-b|/a}\cos\omega t$$

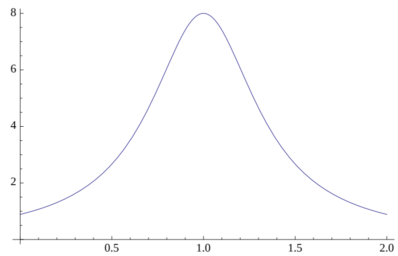

Figura 3: $P_{i\to f}$ come funzione di $\omega$, misurato con un apparato

Per l'ampiezza (10) si ha

$$a_{fi}^{(1)} = \frac{\mu B_1}{4}\frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 t} e^{-(|vt-b|/a} e^{i\omega t} = \frac{\omega_1}{2}\frac{v/a}{(\omega-\omega_0)^2+v^2/a^2} e^{i(\omega-\omega_0)b/v} \tag{13}$$

dove abbiamo spostato la variable $t=\tau+\frac{b}{v}$ nel calcolo. In presenza di due apparecchi a $x=0$ e a $x=b$, il risultato per $a^1_{fi}$ è, all'ordine più basso in $B_1$, la semplice somma di (10) e (13):

$$a_{fi}^{(1)} = \frac{\omega_1}{2}\frac{v/a}{(\omega-\omega_0)^2+v^2/a^2}\left(1+e^{i(\omega-\omega_0)b/v}\right) \tag{14}$$

dove osserviamo effetti importanti dell'interferenza tra due ampiezze (tra il processo di spin flip dovuto al primo apparato e quello dovuto al secondo apparato).

$$P^{(2)} = \frac{\omega_1^2}{2}\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\frac{v^2}{2a^2}}\cos^2(\omega-\omega_0)\frac{b}{v} \tag{15}$$

In generale per $N$ apparati a distanza $b$ fra di loro

$$A_{fi} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{in(\omega-\omega_0)b/v} a_{fi} = \frac{e^{iN\delta\omega b/v}-1}{e^{i\delta\omega b/v}-1}\, a_{fi}$$

e quindi per la probabilità

$$P^{(N)} = \frac{\omega_1^2}{8}\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\frac{v^2}{2a^2}}\frac{\sin^2(N(\omega-\omega_0)\frac{b}{v})}{\sin^2((\omega-\omega_0)\frac{b}{v})} \tag{16}$$

*N.B*, a questo ordine (al primo ordine in $B_1$), non ci sono contributi in cui lo spin si inverte più di una volta. La parte risonante della curva (di larghezza $\Gamma \sim v/a$) è suddivisa in frange di larghezza $\delta\omega \sim v/(bN)$, migliorando notevolmente la precisione della misura di $\mu$, come illustrato in Fig.3, Fig.4 e Fig.5.

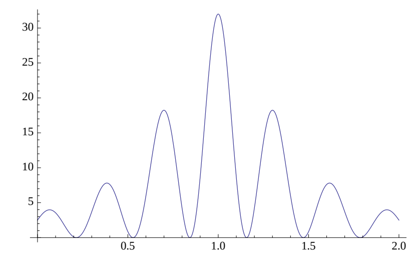


Figura 4: $P_{i \to f}$ come funzione di $\omega$, misurato con due apparati

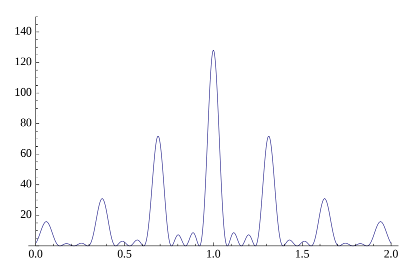


Figura 5: $P_{i \to f}$ come funzione di $\omega$, misurato con quattro apparati