Prova Scritta di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa
29 giugno 2010 (A.A. 09/10)

Tempo a disposizione: 3 ore

Problema 1

Un sistema "a tre stati" è descritto dall'Hamiltoniana,

$$H_0 = M \begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_0 & 0 \\ 0 & 0 & -2E_0 \end{pmatrix} . \tag{1}$$

Si misurano variabili F e G, corrispondenti agli operatori ($\alpha > 0$)

$$\hat{F} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad \hat{G} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} , \tag{2}$$

Visto che $[\hat{F}, \hat{G}] = 0$ si possono misurare (determinare sperimentalmente) i valori di F e G contemporaneamente. Indichiamo come (f, g) (in unità di α) il risultato di una tale misura.

(i) Dimostrare che (f, g) soddisfano

$$2 \geq f + g \geq -1 , \quad 1 \geq fg \geq -2 , \quad 5 \geq f^2 + g^2 \geq 2 . \tag{3}$$

(ii) Si vuole determinare l'intervallo di $(f+g)^2$. Trovare tale intervallo

(A): usando la prima disuguaglianza nella (3);

(B): combinando la seconda e la terza delle (3).

Dire se le due disuguaglianze sono compatibili; e altrimenti, risolvere l'apparente paradosso (spiegare se/dove è errata (A) o (B)), e dire qual'è il corretto intervallo per $(f+g)^2$.

(ii) Supponiamo che una misura contemporanea di F, G abbia dato

$$f + g = 0 . \tag{4}$$

Calcolare il valor d'aspettazione di F, in una misura fatta dopo un intervallo di tempo t.

Problema 2.

Un sistema con spin $s = \frac{1}{2}$ e con momento angolare $L = 1$ è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = A\,\mathbf{L} \cdot \mathbf{s} + B\,(2s_z + L_z) . \tag{5}$$

(i) Nel limite $B = 0$, $A > 0$, trovare lo spettro (i livelli di energia e relative degenerazioni).

(ii) Nel limite $A = 0$, $B \neq 0$, trovare lo spettro (i livelli di energia e relative degenerazioni).

(iii) Trovare l'energia dello stato fondamentale per generici valori di A e B tale che

$$A > B > 0.$$

Formulario

Coefficienti di Clebsch-Gordan (e.g. $-2/3$ va letto come $-\sqrt{2/3}$)

$j_1 \otimes j_2$		J_1	J_2	$\dots$
		M_1	M_2	$\dots$
m_1	m_2	C−G		
m_3	m_4	coefficients		
$\dots$	$\dots$			

Figura 1:

$1/2 \otimes 1/2$		1			
		+1	1	0	
+1/2	+1/2	1	0	0	
	+1/2	−1/2	1/2	1/2	1
	−1/2	+1/2	1/2	−1/2	−1
			−1/2	−1/2	1

Figura 2:

$1 \otimes 1/2$		3/2					
		+3/2	3/2	1/2			
+1	+1/2	1	+1/2	+1/2			
	+1	−1/2	1/3	2/3	3/2	1/2	
	0	+1/2	2/3	−1/3	−1/2	−1/2	
			0	−1/2	2/3	1/3	3/2
			−1	+1/2	1/3	−2/3	−3/2
					−1	−1/2	1

Figura 3:

Operatori $J_\pm$

$$
\begin{aligned}
J_- \,|j,m\rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,|j,m-1\rangle, \\
J_+ \,|j,m\rangle &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\,|j,m+1\rangle. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Soluzione

Problema 1.

(i) Gli autovalori di F sono $1,1,-1$ mentre quelli di G sono $(1,1,-2)$. Utilizzando le degenerazioni presenti tra gli autovalori dei due operatori, possiamo scegliere gli stati come autovalori contemporanei dei due operatori;

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\;;\quad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\;;\quad |3\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\;; \tag{7}$$

con autovalori,

$$(f,g) = (1,1),(-1,1),(1,-2), \tag{8}$$

rispettivamente. Per qualsiasi di queste coppie di numeri, è evidente che la (3) è soddisfatta.

Per rispondere al punto (i) sopra, si possono considerare (le variabili) gli operatori $\hat{F}+\hat{G}$, $\hat{F}\hat{G}$ o $\hat{F}^2+\hat{G}^2$ direttamente, ottenendo le stesse disuguaglianze.

(ii)

$$4 \geq (f+g)^2 \geq 0, \quad (A); \qquad 7 \geq (f+g)^2 \geq -2, \quad (B). \tag{9}$$

La derivazione della (A) è corretta. Infatti gli stessi limiti si hanno considerando direttamente i possibili valori per $(f+g)^2$ che seguono dalla (8). D'altra parte la derivazione della (B) è problematica poiché il valore di (f,g) che dà, per es., il limite massimo della seconda uguaglianza della (3) non dà allo stesso tempo il limite massimo di fg (infatti dà il minimo). In questa condizione, è evidentemente errato *combinare* le due disuguaglianze in maniera naïva. La disuguaglianza (B) è errata nel senso che $(f+g)^2$ non supera mai 4, nè prende un valore negativo; d'altra parte essa correttamente contiene l'intervallo $(4,0)$: come disuguaglianza *matematica* non è errata!

(iii) Lo stato dopo la misura contemporanea è $|2\rangle$. Esso evolve come

$$\begin{aligned}
|t\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{-iE_0t/\hbar}\\-e^{iE_0t/\hbar}\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_0t/\hbar}\frac{|1\rangle+|2\rangle}{\sqrt{2}} - e^{iE_0t/\hbar}\frac{|1\rangle-|2\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\
&= -\sin\frac{E_0t}{\hbar}\,|1\rangle + \cos\frac{E_0t}{\hbar}\,|2\rangle\,.
\end{aligned} \tag{10}$$

La variabile F prende 1 con probabilità $\sin^2\frac{E_0t}{\hbar}$ e -1 con probabilità $\cos^2\frac{E_0t}{\hbar}$: il valore d'aspettazione è

$$\sin^2\frac{E_0t}{\hbar} - \cos^2\frac{E_0t}{\hbar} = -\cos\frac{2E_0t}{\hbar}\,.$$

Problema 2.

(i) Per $B=0$,

$$H = \frac{A}{2}(\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2) = \frac{A}{2}(\mathbf{J}^2 - \frac{11}{4}) \tag{11}$$

Gli autovalori dell'energia sono stati di J definiti: $E_1 = A/2$ (per $J=3/2$; quattro volte degenere) e $E_0 = -A$ (per $J=1/2$; due volte degenere).

L_z	s_z	$E/B = L_z + 2s_z$
1	1/2	2
1	-1/2	0
0	1/2	1
0	-1/2	-1
-1	1/2	0
-1	-1/2	-2

Tabella 1: I livelli di energia per $A = 0$.

(ii) Per $A = 0$ gli autovalori dell'energia sono stati di (s_z, L_z) definiti (Tabella 1). L'unico livello degenere è quello di $E = 0$, doppiamente degenere.

(iii) Si possono determinare i livelli dell'energia per $A \neq 0$, $B \neq 0$ scegliendo una base qualsiasi, per es., o gli stati di J definiti o quelli di (L_z, s_z) definiti trovati ai punti (i) o (ii), e scrivendo l'Hamiltoniana come matrice e diagonalizzandola. Nella base di stati (L_z, s_z),

$$|1\rangle = |1, 1/2\rangle, \quad |2\rangle = |1, -1/2\rangle, \quad |3\rangle = |0, 1/2\rangle,$$

$$|4\rangle = |0, -1/2\rangle, \quad |5\rangle = |-1, 1/2\rangle, \quad |6\rangle = |-1, -1/2\rangle, \tag{12}$$

gli elementi non-diagonali dell'Hamiltoniana

$$H = A\left(\frac{L_+ s_- + L_- s_+}{2} + L_z s_z\right) + B\,(L_z + 2s_z) \tag{13}$$

sono soltanto tra $|2\rangle$ e $|3\rangle$ e tra $|4\rangle$ e $|5\rangle$, mentre

$$E_1 = \langle 1|H|1\rangle = \frac{A}{2} + 2B; \qquad E_6 = \langle 6|H|6\rangle = \frac{A}{2} - 2B\,. \tag{14}$$

Nel sottospazio $|2\rangle, |3\rangle$

$$H = \begin{pmatrix} -A/2 & A/\sqrt{2} \\ A/\sqrt{2} & B \end{pmatrix}; \tag{15}$$

gli autovalori sono

$$E_{2,3} = \frac{1}{2}\left(B - \tfrac{A}{2} \pm \sqrt{B^2 + AB + \tfrac{9A^2}{4}}\right)\,. \tag{16}$$

Nel sottospazio $|4\rangle, |5\rangle$

$$H = \begin{pmatrix} -B & A/\sqrt{2} \\ A/\sqrt{2} & -A/2 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

gli autovalori sono

$$E_{4,5} = \frac{1}{2}\left(-B - \tfrac{A}{2} \pm \sqrt{B^2 - AB + \tfrac{9A^2}{4}}\right)\,. \tag{18}$$

Bisogna trovare quali dei $E_1 \sim E_6$ è più piccolo, per $A > B > 0$.

Per trovare l'energia dello stato fondamentale per $A > B > 0$, notiamo prima di tutto

$$E_1 > E_6, \qquad E_2 > E_3, \qquad E_4 > E_5, \tag{19}$$

per $A, B > 0$. Quindi basta considerare E_6, E_3 e E_5.

Consideriamo prima E_6 e E_5, facendo la differenza

$$E_6 - E_5 = \frac{3}{4}(A-2B) + \frac{1}{2}\sqrt{B^2 - AB + \tfrac{9A^2}{4}}\ . \qquad (20)$$

Questa è certamente positiva per $A > 2B$, ma per $2B > A > B$ il primo termine è negativo, ma

$$\frac{1}{4}(B^2 - AB + \tfrac{9A^2}{4}) - \frac{9}{16}(A-2B)^2 = 2AB - 2B^2 = 2B(A-B) > 0,$$

per cui si ha che

$$E_6 > E_5\ : \qquad (21)$$

possiamo eliminare E_6. Restano E_3 e E_5.

Per trovare quale dei due corrispondono allo stato fondamentale, calcolo

$$E_3 - E_5 = B - \tfrac{1}{2}\sqrt{B^2 + AB + \tfrac{9A^2}{4}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{B^2 - AB + \tfrac{9A^2}{4}} \qquad (22)$$

Ora sia $B + \frac{1}{2}\sqrt{B^2 - AB + \frac{9A^2}{4}}$ che $\frac{1}{2}\sqrt{B^2 + AB + \frac{9A^2}{4}}$ sono positivi. Per vedere quale dei due è più grande, calcoliamo

$$\begin{aligned} & (B + \tfrac{1}{2}\sqrt{B^2 - AB + \tfrac{9A^2}{4}})^2 - (\tfrac{1}{2}\sqrt{B^2 + AB + \tfrac{9A^2}{4}})^2 \\ = \quad & B\sqrt{B^2 - AB + \tfrac{9A^2}{4}} + B^2 - \frac{AB}{2} > 0, \qquad (23) \end{aligned}$$

quest'ultima disuguaglianza si ottiene da

$$(B\sqrt{B^2 - AB + \tfrac{9A^2}{4}})^2 > (B^2 - \frac{AB}{2})^2, \qquad \therefore \quad |B\sqrt{B^2 - AB + \tfrac{9A^2}{4}}| > |B^2 - \frac{AB}{2}|. \qquad (24)$$

Segue dunque

$$E_3 > E_5. \qquad (25)$$

L'energia dello stato fondamentale è dunque

$$E^{(fond)} = E_5 = \frac{1}{2}\left(-B - \tfrac{A}{2} - \sqrt{B^2 - AB + \tfrac{9A^2}{4}}\right), \qquad (26)$$

per $A > B > 0$.