Prova Scritta di Meccanica Quantistica

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università di Pisa
29 giugno 2012 (A.A. 11/12)

Tempo a disposizione: 3 ore. Risolvere:

Problemi 1 o 2 a scelta + [3, (i)-(v)] per la prova scritta completa del corso annuale MQ (A);

Problemi 3 per il Compitino 2 del corso annuale MQ (B);

Problemi 1 e 2 per la prova scritta di MQI, vecchio ordinamento (C);,

Problemi 3 per la prova scritta di MQII, vecchio ordinamento (D).

Indicate chiaramente per quale dei (A)-(D) avete optato.

Problema 1.

Si consideri una particella di spin $\frac{1}{2}$ in un autostato $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ di s ed s_z.

(i) Dire quali sono i possibili risultati delle misure dell'osservabile $A = \mathbf{s}\cdot\mathbf{n}$, dove $\mathbf{n}$ è il versore nel piano $y-z$, che fa un angolo θ con l'asse z.

(ii) Si calcolino gli autovalori e gli autostati di A.

(iii) Si calcolino le probabilità di ottenere i risultati di cui al punto (i) se si effetua una misura di A sullo stato $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$.

Problema 2.

Una particella di massa m è vincolata a muoversi sul segmento $0 < x < a$. Lo stato della particella è descritta dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = N \sin\frac{\pi x}{a}\,(i + 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi x}{a})\ . \qquad (1)$$

(i) Determinare la costante di normalizzazione N.

(ii) Dire quali sono i possibili risultati di misura di energia con le relative probabilità. Trovare il valor medio dell'energia.

(iii) Trovare il valor medio della posizione x della particella.

Problema 3.

Un atomo di idrogeno, dovuto alle interazioni tra l'elettrone e il nucleo, ha un piccolo termine di potenziale aggiuntivo,

$$V = G\,[\,\delta^3(\mathbf{r})\,\mathbf{s}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{s}\cdot\mathbf{p}\,\delta^3(\mathbf{r})\,] \tag{2}$$

dove $G > 0$ e $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$ e $\mathbf{s}$ (in unità di $\hbar$) sono rispettivamente gli operatori delle coordinate, dell'impulso e dello spin dell'elettrone.

(i) Dire perché V non è scritto semplicemente come

$$V = 2G\,\delta^3(\mathbf{r})\,\mathbf{s}\cdot\mathbf{p} \tag{3}$$

(ii) Dire quali dei seguenti osservabili sono conservati in presenza di V:

$$\mathbf{J}^2, \quad J_z, \quad \mathbf{L}^2, \quad L_z, \quad \mathbf{s}^2, \quad s_z, \quad \Pi\ . \tag{4}$$

(Π è la parità. $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{s}$)

(iii) Classificare gli stati dei livelli imperturbati $n = 1,2$ dell'idrogeno, second l'usuale schema, i.e.,

$$n\,L_J \tag{5}$$

dove $L = S, P, D, \ldots$ rappresenta il momento angolare orbitale, e J il momento angolare totale.

(iv) In base a considerazioni di simmetria, dire quali sono gli elementi di matrice non nulli di V (tra gli stati imperturbati di cui al punto (iii)) rilevanti al primo ordine perturbativo in G, e di conseguenza, descrivere se e come il potenziale risolve la degenerazione dei livelli $n = 1,2$.

(v) Quali tra le interazioni fondamentali note oggi, i.e., le interazioni forti (nucleari), le interazioni elettrodevoli* e le interazioni gravitazionali, potrebbero causare le correzioni di forma, (2)? (*le interazioni elettromagnetiche e deboli)

(vi) Calcolare le correzioni all'energia al primo ordine in G ai livelli $n = 1,2$.

Suggerimento: per il punto (vi) potrebbero risultare utili delle relazioni come (ponendo $r_B = 1$)

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{p} = \frac{s_+p_- + s_-p_+}{2} + s_z p_z, \qquad s_+ = s_x + is_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_+ = s_x - is_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{6}$$

$$p_\pm = p_x \pm i p_y = (-i\hbar)\,(\frac{\partial}{\partial x} \pm \frac{\partial}{\partial y}); \tag{7}$$

$$R_{2,0}Y_{0,0} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\,(2-r)\,e^{-r/2}; \qquad R_{2,1}Y_{1,0} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\,z\,e^{-r/2}; \qquad R_{2,1}Y_{1,1} = -\frac{1}{4\sqrt{4\pi}}\,(x+iy)\,e^{-r/2}; \tag{8}$$

$$\int d^3\mathbf{r}\,F(\mathbf{r})\,\delta^3(\mathbf{r})\,\{\ldots\} = F(\mathbf{0})\,\{\ldots\}|_{\mathbf{r}=0}\ . \tag{9}$$

Visto che $G\hbar(lunghezza)^{-4}$ ha la dimensione di un'energia (come si vede dalla (2)), basta reintrodurre r_B^{-4} per ripristinare la dimensione corretta alla fine del calcolo.

Soluzione

Problema 1.

(i)

$$\pm\tfrac{1}{2}. \tag{10}$$

(ii) Gli autostati di $\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}$ (con gli atovalori $\pm\frac{1}{2}$ per $\mathbf{n}$ generico sono

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}\cos\theta/2 \\ e^{i\phi/2}\sin\theta/2 \end{pmatrix}; \qquad \chi_- = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}\sin\theta/2 \\ -e^{i\phi/2}\cos\theta/2 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Per $\mathbf{n}$ del problema, θ generico e $\phi = \pi/2$.

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4}\cos\theta/2 \\ e^{i\pi/4}\sin\theta/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ i\sin\theta/2 \end{pmatrix}; \qquad \chi_- = \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4}\sin\theta/2 \\ -e^{i\pi/4}\cos\theta/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sin\theta/2 \\ -i\cos\theta/2 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

(iii) La probabilità di trovare $\mathbf{n}\cdot\mathbf{s} = \pm\frac{1}{2}$ nello stato

$$\chi_{s_z=1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

sono

$$P_+ = |\langle\chi_+|\chi_{s_z=1/2}\rangle|^2 = \cos^2\theta/2; \qquad P_- = |\langle\chi_-|\chi_{s_z=1/2}\rangle|^2 = \sin^2\theta/2. \tag{14}$$

Problema 2.

(i)

$$\psi(x) = N\,[\,i\sin\tfrac{\pi x}{a} + \sqrt{2}\,\sin\tfrac{2\pi x}{a}\,]\,. \tag{15}$$

$$\int dx\,|\psi|^2 = N^2\int_0^a dx\,[\sin^2\tfrac{\pi x}{a} + 2\,\sin^2\tfrac{2\pi x}{a}\,] = N^2\,\frac{3a}{2}\,. \tag{16}$$

$$N = \sqrt{\frac{2}{3a}}. \tag{17}$$

Utilizzando le autofunzioni normalizzate,

$$\psi^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\sin\tfrac{\pi x}{a}\,, \quad \psi^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\sin\tfrac{2\pi x}{a}\,, \tag{18}$$

con l'energia

$$E^{(1)} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \qquad E^{(2)} = \frac{4\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \tag{19}$$

eispettivamente, ψ si scrive come

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{1}{3}}\,[\,i\,\psi^{(1)} + \sqrt{2}\,\psi^{(2)}\,]. \tag{20}$$

(ii) La misura dell'energia darà o $E^{(1)}$ o $E^{(2)}$, con rispettive probabilità, $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$.

(iii)

$$\begin{aligned}\langle x\rangle &= N^2\int_0^a dx\,x\,[\sin^2\tfrac{\pi x}{a}+2\sin^2\tfrac{2\pi x}{a}] = N^2\int_{-a/2}^{a/2} d\tilde{x}\,(\tilde{x}+a/2)\,[\sin^2\tfrac{\pi(\tilde{x}+a/2)}{a}+2\sin^2\tfrac{2\pi(\tilde{x}+a/2)}{a}] \\ &= N^2\int_{-a/2}^{a/2} d\tilde{x}\,(\tilde{x}+a/2)\,[\cos^2\tfrac{\pi\tilde{x}}{a}+2\sin^2\tfrac{2\pi\tilde{x}}{a}] = \frac{aN^2}{2}\,\frac{3a}{2} = \frac{a}{2}\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Problema 3.

(i)

$$V = 2G\delta^3(\mathbf{r})\,\mathbf{s}\cdot\mathbf{p} \tag{22}$$

Non è Hermitiano e perciò non è ammesso come forma di un'Hamitoniano.

(ii)

$$J^2,\quad J_z,\quad \mathbf{s}^2\,. \tag{23}$$

(iii)

$$1S_{1/2};\quad 2S_{1/2};\quad 2P_{1/2};\quad 2P_{3/2}. \tag{24}$$

(iv) Per $n=1$ ovviamente la correzione si annula poiché V cambia la parità. Per $n=2$ gli unici elementi di matrice non nulli tra gli stati inperturbati sono tra $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$; visto che J_z si conserva, basta considerare e.g., tra gli stati di $J_z=+1/2$:

$$\langle 2S_{1/2},J_z=\tfrac{1}{2}|V|2P_{1/2},J_z=\tfrac{1}{2}\rangle;\qquad \langle 2P_{1/2},J_z=\tfrac{1}{2}|V|2S_{1/2},J_z=\tfrac{1}{2}\rangle; \tag{25}$$

(vi) Per $n=2$ basta considerare l'elemento di matrice

$$\langle 2S_{1/2},J_z=\tfrac{1}{2}|V|2P_{1/2},J_z=\tfrac{1}{2}\rangle = V_1+V_2, \tag{26}$$

$$V_1 = G\,\langle 2S_{1/2},J_z=\tfrac{1}{2}|\,\delta^3(\mathbf{r})\,\mathbf{s}\cdot\mathbf{p}\,|2P_{1/2},J_z=\tfrac{1}{2}\rangle, \tag{27}$$

$$V_2 = G\,\langle 2S_{1/2},J_z=\tfrac{1}{2}|\,\mathbf{s}\cdot\mathbf{p}\,\delta^3(\mathbf{r})\,|2P_{1/2},J_z=\tfrac{1}{2}\rangle = G\,\langle 2P_{1/2},J_z=\tfrac{1}{2}|\,\delta^3(\mathbf{r})\mathbf{s}\cdot\mathbf{p}\,|2S_{1/2},J_z=\tfrac{1}{2}\rangle^* \tag{28}$$

e h.c.; dove

$$|2P_{3/2},J_z=\tfrac{1}{2}\rangle = R_{2,1}(r)\,[\sqrt{\tfrac{1}{3}}Y_{1,1}\,|\downarrow\rangle+\sqrt{\tfrac{2}{3}}Y_{1,0}\,|\uparrow\rangle]; \tag{29}$$

$$|2P_{1/2},J_z=\tfrac{1}{2}\rangle = R_{2,1}(r)\,[\sqrt{\tfrac{2}{3}}Y_{1,1}\,|\downarrow\rangle-\sqrt{\tfrac{1}{3}}Y_{1,0}\,|\uparrow\rangle]; \tag{30}$$

$$|2S_{1/2},J_z=\tfrac{1}{2}\rangle = R_{2,0}(r)\,Y_{0,0}\,|\uparrow\rangle \tag{31}$$

Utilizzo

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{p} = \frac{s_+p_-+s_-p_+}{2}+s_zp_z,\qquad s_+=s_x+is_y=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad s_+=s_x-is_y=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}; \tag{32}$$

$$p_\pm = p_x\pm ip_y; \tag{33}$$

$$R_{2,0}Y_{0,0} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\,(2-r)\,e^{-r/2}; \qquad R_{2,1}Y_{1,0} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\,z\,e^{-r/2}; \qquad R_{2,1}Y_{1,1} = -\frac{1}{4\sqrt{4\pi}}\,(x+iy)\,e^{-r/2}; \tag{34}$$

Visto che

$$R_{2,1}Y_{1,0}|_{\mathbf{r}=0} = R_{2,1}Y_{1,1}|_{\mathbf{r}=0} = 0, \tag{35}$$

risulta, usando (9), che

$$V_2 = 0 : \tag{36}$$

basta considerare V_1. Usando (8), (9), si ha

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{G}{2\sqrt{2\pi}}\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left[\langle\uparrow|\left(\frac{s_+p_- + s_-p_+}{2} + s_z p_z\right)\{-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,(x+iy)\,e^{-r/2}|\downarrow\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,z\,e^{-r/2}|\uparrow\rangle\}\right]_{\mathbf{r}=0} \\ &= \frac{G}{16\pi}\sqrt{\tfrac{1}{3}}\left[-\tfrac{1}{2}\,p_-\,(x+iy)\,e^{-r/2} - \frac{1}{2}\,p_z\,z\,e^{-r/2}\right]_{\mathbf{r}=0} \\ &= i\hbar\frac{G}{32\pi\sqrt{3}}(2+1) = i\hbar\frac{\sqrt{3}G}{32\pi} \end{aligned} \tag{37}$$

(N.B. i termini che si ottengono agendo $\hat{p}$ sul fattore esponenziale si annullano a $\mathbf{r}=0$.) Visto che $G\hbar L^{-4}$ ha la dimensione di un'energia, per ripristinare la dimensione corretta, basta reintrodurre r_B^{-4}:

$$V_1 = i\hbar\frac{\sqrt{3}G}{32\pi r_B^4}\ . \tag{38}$$

Nello spazio di stati imperturbati degeneri $n=2$, $|2S_{1/2}\rangle$, $|2P_{1/2}\rangle$, $|2P_{3/2}\rangle$, perciò, considerando gli stati di $J_z = +1/2$ (la degenerazione su J_z resta intatta), si ha gli elementi di matrice di V,

$$\begin{pmatrix} 0 & i\hbar\frac{\sqrt{3}G}{32\pi r_B^4} & 0 \\ -i\hbar\frac{\sqrt{3}G}{32\pi r_B^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{39}$$

Diagonalizzando la matrice, si hanno le correzioni

$$\Delta E_{J=1/2} = \pm\frac{\sqrt{3}G\hbar}{32\pi\, r_B^4}, \tag{40}$$

ciascuno dei quali doppiamente degeneri; gli autostati relativi sono

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,[\,|2S_{1/2}, J_z=\tfrac{1}{2}\rangle \mp |2P_{1/2}, J_z=\tfrac{1}{2}\rangle\,]\ . \tag{41}$$

Osserviamo infatti che L non è un buon numero quantico. (Punto (ii)). Infine, gli stati di $J=3/2$ quattro volte degenere, restano invariati,

$$\Delta E_{J=3/2} = 0\ . \tag{42}$$