Prova Scritta di Meccanica Quantistica II

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
30 giugno '08 (A.A. 07/08)

Tempo a disposizione: 3 ore.

Problema 1.

Il deutone è uno stato legato di un protone e un neutrone. Un semplice modello per tale sistema è dato da:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V_1(r) + V_2(r)\,\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{s}_2 + V_3(r)\,[\,3(\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{r})\,(\mathbf{s}_2\cdot\mathbf{r}) - (\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{s}_2)\,\mathbf{r}^2\,]\;.$$

dove $\mathbf{r}$ rappresenta la posizione relativa tra i due nucleoni, e $V_i(r)$ sono potenziali a simmetria centrale, $\mu \simeq m_p/2$ è la massa ridotta.

(i) Trascurando prima il termine con $V_3(r)$, elencare tutti i buoni numeri quantici (i.e., l'insieme delle variabili conservate e compatibili tra loro), O_i.

(ii) Sempre trascurando $V_3(r)$, assumiamo che $V_{1,2}$ abbia la forma ($0 < \varepsilon \ll 1$)

$$V_1(r) = \begin{cases} -V_0, & 0 \le r \le a, \\ = 0, & r > a\,. \end{cases}; \qquad V_2(r) = \varepsilon\, V_1(r)\;,$$

con i parametri V_0, a tali che H ammetta un solo livello legato. Determinare i numeri quantici (autovalori di O_i) dell'unico stato legato.

(iii) Elencare i buoni numeri quantici O_i nel caso in cui il termine $\propto V_3(r)$ è tenuto conto anche. Supponiamo che lo stato legato ψ persista in presenza di tale termine. (a) il valore medio del dipolo elettrico $\mathbf{D} = e\,\mathbf{r}$ in ψ è nullo? (b) il valore medio del quadrupolo elettrico $\mathbf{Q} = e\,(3z^2 - \mathbf{r}^2)$ in ψ è nullo?

Problema 2.

Quali dei seguenti processi in Carbone (dove lo strato chiuso $(1s)^2$ è implicito) sono transizioni di dipolo?

(1): $(2s)^2(2p)(3d)\ {}^3D \to (2s)^2(2p)^2\ {}^3P$;

(2): $(2s)^2(2p)(3s)\ {}^3P \to (2s)^2(2p)^2\ {}^1S$;

(3): $(2s)^2(2p)(3d)\ {}^1D \to (2s)^2(2p)(3s)\ {}^1P$;

(4): $(2s)(2p)^3\ {}^3D \to (2s)^2(2p)^2\ {}^3P$;

(5): $(2s)^2(2p)(3p)\ {}^3P \to (2s)^2(2p)^2\ {}^3P$;

(6): $(2s)(2p)^3\ {}^5S \to (2s)^2(2p)^2\ {}^3P$;

(7): $(2s)^2(2p)(3d)\ {}^1D \to (2s)^2(2p)^2\ {}^1S$;

(8): $(2s)^2(2p)(3s)\ {}^1P \to (2s)^2(2p)^2\ {}^1S$;

Problema 3.

Un atomo di idrogeno nello stato fondamentale è sottoposto, a partire da $t = 0$, in un campo elettrico uniforme debole,

$$\mathcal{E} = (\mathcal{E}, 0, 0), \qquad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0\, e^{-bt},$$

dove b, $\mathcal{E}_0$ sono costanti. Calcolare, in teoria delle perturbazioni, la probabilità che l'atomo si trovi in uno stato eccitato $n = 2$, dopo un lungo intervallo di tempo.

Soluzione

Problema 1.

(i)

$$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{S}^2 - \frac{3}{2}),$$

perciò i buoni numeri quantici sono $\mathbf{L}^2, L_3, \mathbf{S}^2, S_3$ e parità $\mathcal{P}$ ($\mathbf{S}$ è lo spin totale).

(ii)

$$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{S}^2 - \frac{3}{2}) = \begin{cases} +\frac{1}{4} & S = 1, \\ -\frac{3}{4} & S = 0. \end{cases}$$

Dunque la buca è più profonda per $S = 1$ che per $S = 0$. Visto che esiste uno stato legato solo, per ipotesi, lo stato legato deve avere

$$S = 1, \qquad L = 0,$$

i.e., la buca è appena sufficientemente profonda da ammettere uno stato legato per $S = 1$ ma non per $S = 0$. Lo stato fondamentale è tre volte degenere ($S_z = 1, 0, -1$).

(iii)

$$(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}) = \frac{1}{2}[(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r} + \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r})^2 - (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})^2 - (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r})^2]$$

$$= \frac{1}{2}[(\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})^2 - \frac{1}{4}(\sigma_1 \cdot \mathbf{r})^2 - \frac{1}{4}(\sigma_2 \cdot \mathbf{r})^2] = \frac{1}{2}[(\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})^2 - \frac{\mathbf{r}^2}{2}]$$

per cui le variabili conservate sono

$$\mathbf{J}^2, \quad J_z, \quad S, \quad \mathcal{P},$$

ma non più L. Lo stato ψ è autosato di questi operatori, perciò

$$\langle \psi | e\mathbf{r} | \psi \rangle = 0, \qquad \langle \psi | Q | \psi \rangle \neq 0.$$

Problema 2.

(1), (4) e (8).

Problema 3.

Per semplificare il calcolo prendiamo la direzione del campo elettrico per la quantizzazione del momento angolare. (Oppure semplicemente cambiamo le variabili e $x \to z$.) Il potenziale è

$$-e\mathcal{E}_0 \, e^{-bt} \, z.$$

In teoria delle perturbazioni, la probalilità che l'atomo si trova in uno stato $n = 2$ è non nulla solo per lo stato $\psi_{2,1,0}$, ed è data da:

$$P = \frac{e^2 \mathcal{E}_0^2}{\hbar^2} \left| \int_0^\infty dt \, e^{-bt} e^{i\omega_{21} t} \langle 2,1,0 | z | 1,0,0 \rangle \right|^2, \qquad \omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$$

$$\langle 2,1,0 | z | 1,0,0 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} 2\pi \int d(\cos\theta) \cos^2\theta \int dr r^3 R_{2,1} R_{1,0} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} 2\pi \frac{2}{3} \frac{128}{81} \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2^7 \sqrt{2}}{3^5} r_B.$$

$$P = \frac{e^2 \mathcal{E}_0^2}{\hbar^2} \frac{1}{b^2 + \omega_{21}^2} \frac{2^{15}}{3^{10}} r_B^2 \simeq 0.55 \left(\frac{e \, r_B \mathcal{E}_0}{\hbar} \right)^2 \frac{1}{b^2 + \omega_{21}^2};. \tag{1}$$

Se manteniamo la forma del potenziale

$$-e\mathcal{E}_0\, e^{-bt}\, x$$

e l'asse di quantizzazione a $\hat{z}$, allora troveremo che le transizioni possibili sono

$$|1,0,0\rangle \to |2,1,1\rangle, \qquad |1,0,0\rangle \to |2,1,-1\rangle,$$

calcolando le probabilità per ciascuno – che risulta $\frac{1}{2}$ della sopra (1) – e sommando si ottiene lo stesso risultato di prima:

$$P = P_{(100)\to(2,1,1)} + P_{(100)\to(2,1,-1)} = \frac{e^2\mathcal{E}_0^2}{\hbar^2}\frac{1}{b^2+\omega_{21}^2}\frac{2^{15}}{3^{10}}r_B^2.$$