Prova Scritta di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
31 gennaio '08 (A.A. 07/08)

Tempo a disposizione: 2.5 ore.

Problema 1.

Un sistema di due spin $1/2$ è nello stato

$$|\Psi\rangle = \frac{2|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2}{\sqrt{5}} \ , \tag{1}$$

dove $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ sono autostati di s_z. Supponiamo inoltre che le due particelle si trovino a grande distanza (il sito A e il sito B) di modo che l'osservatore che si trova in A sia in grado di misurare solo il primo spin, l'osservatore in B solo il secondo spin. (Figura 1)

(i) *Sapendo* che la misura fatta in A di $s_{1,z}$ ha dato il risultato $+\frac{1}{2}$, trovare la probabilità che la misura $s_{2,z}$ del secondo spin (fatta in B) dia il risultato $+\frac{1}{2}$. (*3 punti*)

(ii) Se invece l'osservatore in B non è a conoscenza del risultato della misura fatta in A, qual'è la probabilità di trovare $s_{2,z} = +\frac{1}{2}$? (*4 punti*)

(iii) *Sapendo* che la misura fatta in A di $s_{1,x}$ ha dato il risultato $+\frac{1}{2}$, trovare la probabilità che la misura $s_{2,x}$ del secondo spin (fatta in B) dia il risultato $+\frac{1}{2}$; (*4 punti*)

(iv) Supponiamo che l'osservatore in B non sia a conoscenza degli esperimenti fatti in A (né della loro esistenze né tantomeno i risultati). Determinare la matrice densità ρ, che descrive le varie probabilità della misura di $\mathbf{s}_2$. In altre parole, ρ è definito da

$$\langle\Psi|\hat{f}|\Psi\rangle = \mathrm{Tr}\,\rho\,\mathbf{f}$$

dove $\hat{f}$ è un operatore che dipende da $\mathbf{s}_2$, $\mathbf{f}$ è la matrice 2×2,

$$\mathbf{f}_{ij} = \langle i|\hat{f}|j\rangle$$

nella base degli stati $|i\rangle = |s_{2,z} = \pm\frac{1}{2}\rangle$. (*4 punti*)

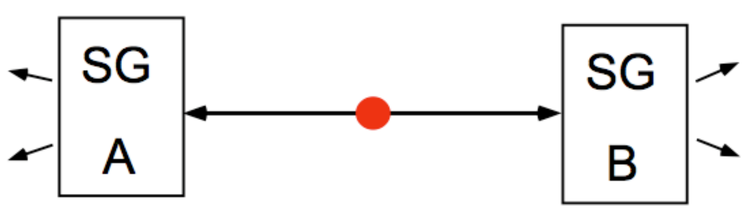

Figura 1:

Problema 2.

Un atomo di idrogeno

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$$

si trova in uno stato eccitato $n = 2$.

(i) Dire qual'è la degenerazione del livello $n = 2$, tenendo conto dello spin dell'elettrone. (*3 punti*)

(ii) All'inizio l'atomo è nello stato,

$$|J, J_z; L; \mathcal{P}\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; -\rangle \ , \tag{2}$$

dove L è il momento angolare orbitale, J il momento angolare totale, $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{s}$, $\mathcal{P}$ è la parità [1] . Scrivere la funzione d'onda completa (radiale, angolare, spin) dello stato. Qual'è la distribuzione angolare dell'elettrone (come funzione di θ, ϕ) a r fisso? (*3 punti*)

(iii) Quale sarebbe la distribuzione angolare dell'elettrone nello stesso stato, se il contatore fosse in grado di vedere (registrare) solo l'elettrone con $s_x = +\frac{1}{2}$? (*3 punti*)

(iv) All'istante $t = 0$ si accende un campo magnetico esterno, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, B è costante. L'Hamiltoniana è data da:

$$H^{(t>0)} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} - \frac{e\,\hbar}{2\,m\,c}\,(\mathbf{L} + 2\,\mathbf{s}) \cdot \mathbf{B} \ .$$

Dire quali sono gli operatori conservati. (*3 punti*)

(v) Scrivere la funzione d'onda all'istante t ($t > 0$). Determinare la distribuzione angolare dell'elettrone all'istante t utilizzando il contatore di cui al punto (ii) (che registra soltanto l'elettrone con $s_x = +1/2$). (*3 punti*)

[1] Considerate positiva la parità intrinseca dell'elettrone e del protone.

Soluzione

Problema 1.

(i) Zero.

(ii) $\frac{1}{5}$.

(iii) Esprimendo $|\Psi\rangle$ in termini di autostati di $s_{1,x}$, $s_{2,x}$, $|\pm\rangle_1$, $|\pm\rangle_2$, si ha

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{5}}[\,|+\rangle|+\rangle - 3|+\rangle|-\rangle + 3|-\rangle|+\rangle - |-\rangle|-\rangle\,].$$

Sapendo che la misura di $S_{1,x}$ ha dato il risultato $|+\rangle$, lo stato è ridotto a

$$|+\rangle_1 \otimes \frac{1}{\sqrt{10}}\,(|+\rangle_2 - 3\,|-\rangle_2)\ :$$

la probabilità di trovare il risultato $S_{2,x} = 1/2$ è

$$\frac{1}{10}\ .$$

(iv)

$$\langle\Psi|\hat{f}|\Psi\rangle = \frac{4}{5}f_{22} + \frac{1}{5}f_{11}\ .$$

Perciò

$$\rho = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 4/5 \end{pmatrix}\ .$$

Visto che $\rho^2 \neq \rho$, si tratta di uno stato misto.

Problema 2.

(i) $4 \cdot 2 = 8$.

(ii) Dalla parità segue che $L = 1$. Lo stato in questione (2) è composta da $L = 1$, $s = \frac{1}{2}$, quindi

$$\Psi = R_{2,1}(r)\,[\,\sqrt{\frac{2}{3}}Y_{1,1}(\theta,\phi)|\downarrow\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}Y_{1,0}(\theta,\phi)|\uparrow\rangle\,]\ . \tag{3}$$

La distribuzione angolare dell'elettrone è:

$$d\Omega\,\frac{1}{4\pi}(|\sin\theta\, e^{i\phi}|^2 + |\cos\theta|^2) = d\Omega\,\frac{1}{4\pi}\ . \tag{4}$$

la distribuzione è isotropa.

(iii) Riscrivendo lo stato in termini di autostato di s_x:

$$\begin{aligned}\Psi &= R_{2,1}(r)\,[\,\sqrt{\tfrac{2}{3}}Y_{1,1}(\theta,\phi)\tfrac{|+\rangle-|-\rangle}{\sqrt{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{3}}Y_{1,0}(\theta,\phi)\tfrac{|+\rangle+|-\rangle}{\sqrt{2}}\,] \\ &= R_{2,1}(r)\,[\,\sqrt{\tfrac{2}{3}}Y_{1,1}(\theta,\phi) - \sqrt{\tfrac{1}{3}}Y_{1,0}(\theta,\phi)\,]\tfrac{|+\rangle}{2} + \ldots \\ &= -R_{2,1}(r)\,\tfrac{1}{\sqrt{4\pi}}\,[\sin\theta\, e^{i\phi} + \cos\theta]\tfrac{|+\rangle}{2} + \ldots\end{aligned} \tag{5}$$

La distribuzione in questo caso è:

$$d\Omega\,\frac{1}{4\pi}|\sin\theta\, e^{i\phi} + \cos\theta|^2 = d\Omega\,\frac{1}{4\pi}(1 + \sin 2\theta\,\cos\phi)\ .$$

(iv)

$$H^{(t>0)} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} - \frac{e\hbar B}{2mc}\,(L_z + 2s_z)\;.$$

$H^{(t>0)}$ commuta con J^2, L^2, s^2, J_z, L_z, s_z.

(v) La funzione d'onda (3) non è autostato di $H^{(t>0)}$, ma ciascuno dei due termini lo è. Considerando soltanto lo spostamento di energia dovuto al termine proporzionale a B,

$$\Delta E = 0, \qquad \text{per} \quad \psi_1 = R_{2,1}(r)\,Y_{1,1}(\theta,\phi)|\downarrow\rangle$$

$$\Delta E = -\frac{e\hbar B}{2mc} \equiv -\varepsilon, \qquad \text{per} \quad \psi_2 = R_{2,1}(r)\,Y_{1,0}(\theta,\phi)|\uparrow\rangle$$

La parte di ψ_2 acquista una fase $e^{i\varepsilon t/\hbar}$, per cui

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= R_{2,1}(r)\,[\,\sqrt{\tfrac{2}{3}}Y_{1,1}(\theta,\phi)|\downarrow\rangle - e^{i\varepsilon t/\hbar}\sqrt{\tfrac{1}{3}}Y_{1,0}(\theta,\phi)|\uparrow\rangle\,] \\ &= -R_{2,1}(r)\,\tfrac{1}{\sqrt{4\pi}}\,[\sin\theta\, e^{i\phi} + \cos\theta\, e^{i\varepsilon t/\hbar}\,]\,\tfrac{|+\rangle}{2} + \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

dove una fase $e^{-iE_2 t/\hbar}$, con $E_2 = -e^2/8r_B$, comune ai due termini di Ψ, è stata trascurata.

La distribuzione richiesta si ottiene facendo la sostituzione

$$\phi \to \phi - \varepsilon t/\hbar = \phi - \frac{eBt}{2mc}\;,$$

nella (4), perciò:

$$dP = d\Omega\,\frac{1}{4\pi}\,[\,1 + \sin 2\theta\,\cos(\phi - \frac{eBt}{2mc})\,]\;.$$