Compitino 1 (recupero) di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
12 gennaio 2006 (A.A. 05/06)
(Tempo a disposizione: 3 ore.)

Problema

Una particella di massa m si muove in un potenziale unidimensionale,

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < a, \\ -V_0 & -a \leq x < 0, \\ 0 & 0 \leq x < a, \\ \infty & x > a. \end{cases} \tag{1}$$

($V_0 > 0$ è costante).

(i) Trovare l'equazione implicita per determinare i livelli energetici;

(ii) Dimostrare che esiste un minimo valore di V_0, $V_{0,min} > 0$, al di sotto del quale non ci possono essere stati legati con l'energia negativa.

(iii) Dire per quali potenziali (V_0, a) uno degli stati legati ha l'energia esattamente uguale a zero.

(iv) Trovare la funzione d'onda esplicitamente in questo caso ($E = 0$).

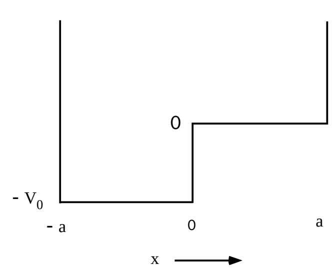

Figura 1:

Soluzione

(i) Considerando prima il caso $E > 0$, la funzione d'onda nella regione $-a \le x < 0$, può essere scritta come

$$\psi_I = A \sin k'(x+a), \qquad k' = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar} \tag{2}$$

La funzione d'onda nella regione $0 \le x < a$ invece ha una forma generale

$$\psi_{II} = B \sin k(x-a), \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \tag{3}$$

Le condizioni di continuità a $x = 0$ sono:

$$A \sin k' a = -B \sin k a; \qquad A k' \cos k' a = B k \cos k a; \tag{4}$$

perciò

$$\frac{\tan k' a}{k'} = -\frac{\tan k a}{k} \tag{5}$$

Per gli autovalori con $E < 0$, $E > -V_0$, la condizioine (5) è valida con la sostituzione,

$$k \to i\kappa, \qquad \kappa = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}, \tag{6}$$

$$\tan ka = \frac{e^{ika} - e^{-ika}}{i(e^{ika} + e^{-ika})} \to i \tanh \kappa a, \tag{7}$$

per cui essa prende forma

$$\frac{\tanh \kappa a}{\kappa} = -\frac{\tan k' a}{k'} \tag{8}$$

(ii) Per uno stato di $E = V_0$, $k = 0$, $\therefore$ la condizione di continuità (5) o (8) si riduce a

$$\frac{\tan k_0' a}{k_0' a} = -1, \qquad \text{con} \quad k_0' = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}. \tag{9}$$

Esistono perciò stati con $E = 0$ se (V_0, a) soddisfano questa condizione.

(iii) Per dimostrare che esistono i livelli energetici con $-V_0 < E < 0$ soltanto per V_0 sufficientemente grande, basta considerare V_0 arbitrariamente piccolo. Per tale V_0, sia $k'a = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}\,a}{\hbar}$ che $\kappa a = \frac{\sqrt{2m(-E)}\,a}{\hbar}$ possono essere presi arbitrariamente piccoli. Ma allora

$$-\frac{\tan k' a}{k' a} \simeq -1, \qquad \frac{\tanh \kappa a}{\kappa a} \simeq 1, \tag{10}$$

perciò la condizione per uno stato stazionario con $E < V_0$, la (8), non può essere soddisfatta. *Q.E.D.*

(iv) È interessante osservare che per uno stato con $E = 0$, la funzione d'onda nella regione $0 \le x \le a$ risulta di forma lineare,

$$\psi_{II}(x) = C \cdot (x - a), \tag{11}$$

che si ottiene o risolvendo l'equazione di Schrödinger direttamente (per $E = 0$ essa si riduce a $\psi'' = 0$), o considerando il limite $k \to 0$ nella (14). Nel secondo metodo va preso il limite

$$k' \to 0, \qquad B \to \infty, \tag{12}$$

con il prodotto

$$C = k' \cdot B \tag{13}$$

tenuto fisso. La funzione d'onda nella regione $-a \leq x \leq 0$ è data da:

$$\psi_I = A \sin k'(x + a), \qquad k' = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar} \tag{14}$$