Compitino 2 di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
19 dicembre 2005 (A.A. 05/06)
(Tempo a disposizione: 2 ore.)

Problema 1

Una particella (nucleo, atomo, molecola, etc) O, di spin $S = \frac{1}{2}$, decade, nel suo sistema di riposo, in due particelle A e B, di spin 1 e $\frac{1}{2}$, rispettivamente. Supponiamo che, dalla misura della distribuzione angolare, sappiamo che questo processo avviene sempre in onda S (il momento angolare orbitale del moto relativo tra A e B è $\ell = 0$).

(i) Supponiamo che prima del decadimento la particella O fosse nello stato,

$$|S, S_z\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle. \tag{1}$$

Assumendo che la misura di s_{Az} ha dato il risultato $+1$, rispondere quali valori e con quali probabilità, ci si aspetta di trovare per il risultato di una misura di s_{Bz}, fatta immediatamente dopo. [*1 punto*]

(ii) La stessa domanda di prima (*i.e.* sapendo che la misura di s_{Az} ha dato il risultato $+1$), ma per la misura di s_{Bx},. [*2 punti*]

(iii) Quale sarebbe la predizione, invece, per il risultato della misura di s_{Bz}, nel caso in cui non si misurasse lo spin s_A (alternativamente, se non si conoscesse il risultato della misura di s_A)? [*2 punti*]

(iv) La stessa domanda di [(iii)] ma per la misura di s_{Bx}, anziché di s_{Bz}. [*2 punti*]

(v) Dimostrare che nei casi discussi in [(iii)] e [(iv)], il sistema appare come uno stato misto per l'osservatore (di s_{Bi}), determinando la matrice densità. [*1 punto*]

Problema 2

Un atomo di idrogeno è in uno stato di $n = 3$ (lo stato fondamentale è $n = 1$). Ad un tratto ($t = 0$) si accende il campo magnetico debole uniforme e costante, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. È noto che l'Hamiltoniana a $t > 0$ è:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} - \frac{e\hbar}{2mc}(\mathbf{L} + 2\mathbf{s}) \cdot \mathbf{B} \tag{2}$$

dove $\mathbf{L}$, $\mathbf{s}$ sono gli operatori del momento angolare orbitale e dello spin (in unità di $\hbar$), dell'elettrone.

(i) A $t < 0$ (*i.e.*, con $B = 0$), qual'è il grado di degenerazione del livello $n = 3$, tenendo conto anche dello spin dell'elettrone (ma non del protone)? [*2 punti*]

(ii) In quanti sottolivelli si divide il livello $n = 3$? Dire qual'è il grado di degenerazione di ciascun sottolivello. [*2 punti*]

(iii) Quali, tra gli operatori ($i = 1, 2, 3$)

$$\mathbf{J}_i = (\mathbf{L} + \mathbf{s})_i; \quad \mathbf{J}^2; \quad \mathbf{K}_i = (\mathbf{L} + 2\mathbf{s})_i; \quad \mathbf{K}^2, \tag{3}$$

sono conservati? [*2 punti*]

(iv) Determinare il valor medio di $\mathbf{p}^2$ nello stato più basso tra questi. [*1 punto*]

Formulario:

Le funzioni radiali del livello $n = 3$ (dove $r_{B=1}$):

$$R_{3,0}(r) = \frac{2e^{-r/3}\left(2r^2 - 18r + 27\right)}{81\sqrt{3}}; \tag{4}$$

$$R_{3,1}(r) = \frac{1}{27}\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-r/3}\left(4 - \frac{2r}{3}\right)r; \tag{5}$$

$$R_{3,2}(r) = \frac{2}{81}\sqrt{\frac{2}{15}}e^{-r/3}r^2. \tag{6}$$

L'integrale semplice:

$$\int_0^\infty dt\, t^n\, e^{-t} = \Gamma(n+1) = n!. \tag{7}$$

Soluzione

Problema 1.

(i) La funzione d'onda è data da:

$$|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1,1\rangle|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1,0\rangle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1,1\rangle|\downarrow\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1,0\rangle|\uparrow\rangle. \tag{8}$$

Sapendo che la misura di s_A ha dato il risulltato $s_{A,z} = 1$, il risultato della misura di $s_{B,z}$ darà il risultato, $s_{B,z} = -\frac{1}{2}$, con probabilità 1.

(ii) L'autofunzione di s_x per una particella di spin$\frac{1}{2}$ sono

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle); \quad |\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle); \tag{9}$$

per autovalori, $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$, rispettivamente. Avendo lo stato $|1,1\rangle|\downarrow\rangle$ la misura di $s_{B,x}$ dà allora $\frac{1}{2}$ con probabilità $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ con probabilità $\frac{1}{2}$.

(iii)

$$P_\uparrow = \frac{1}{3}; \quad P_\downarrow = \frac{2}{3}. \tag{10}$$

(iv)

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \tag{11}$$

(v) Il valor medio di un operatore O che si riferisce allo spin s_B è dato da

$$\langle\Psi|O|\Phi\rangle = \frac{2}{3}O_{22} + \frac{1}{3}O_{11} = \mathrm{Tr}\,\rho\, O, \tag{12}$$

con

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Visto che

$$\rho^2 \neq \rho, \tag{14}$$

si tratta di uno stato misto (non puro).

Problema 2.

(i)

$$3^2 \cdot 2 = 18. \tag{15}$$

(ii) $L = 0,1,2$ per $n = 3$. $L_z + 2s_z$ prende i valori $3,2,1,0,-1,-2,-3$. Il livello $n = 3$ si divide in sette sottolivelli. Contando gli stati che hanno i determinati valori di $L_z + 2s_z$ si ha il grado di degenerazione, $1,2,4,4,4,2,1$ rispettivamente, per gli stati con $L_z + 2s_z$, cioè con

$$\Delta E = \mu B\,(L_z + 2s_z). \tag{16}$$

(iii) Solo J_z e K_z.

(iv) Mettiamo $r_B = 1$. Lo stato più basso corrisponde a $L_z + 2\,s_z = 3$, cioè, $L_z = 2$, perciò $L = 2$.

$$\langle p^2 \rangle = 2m\,\langle \frac{p^2}{2m} \rangle = 2m\,\langle H_0 + \frac{e^2}{r} \rangle = 2m\,[-\frac{e^2}{18\,r_B} + \int dr\,r^2\,\frac{e^2}{r}\,R_{3,2}^2\,]. \tag{17}$$

L'integrale è

$$e^2\,\frac{\int_0^\infty dr\,r^5\,e^{-2r/3}}{\int_0^\infty dr\,r^6\,e^{-2r/3}} = e^2\,\frac{(\frac{3}{2})^6\,5!}{(\frac{3}{2})^7\,6!} = \frac{e^2}{9\,r_B}, \tag{18}$$

dove abbiamo recuperato la costante dimensionale. Il risultato è:

$$\langle p^2 \rangle = \frac{m\,e^2}{9\,r_B}. \tag{19}$$