Compitino 2 (recupero) di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
12 gennaio 2006 (A.A. 05/06)

(Tempo a disposizione: 3 ore. Scegliere uno dei problemi 2.)

Problema 1

Si misurano varie componenti di spin di una particella ($s = \frac{1}{2}$) con un apparecchio à la Stern-Gerlach. Supponiamo che la probabilità per $s_z = +\frac{1}{2}$ sia 0.75, la probabilità per $s_z = -\frac{1}{2}$ sia 0.25. Analogamente, per la misura di s_x si hanno le probabilità 0.5 e 0.5, rispettivamente per i risultati $s_x = +\frac{1}{2}$ e per $s_x = -\frac{1}{2}$, mentre per la misura di s_y si hanno le probabilità 0.93 e 0.07, per i risultati $s_y = +\frac{1}{2}$ e per $s_y = -\frac{1}{2}$ rispettivamente.

Discutere se si tratta di uno stato puro o uno stato misto generico. [*7 punti*]

Suggerimento:

Visto che gli stati puri sono casi particolari di stati misti, conviene utilizzare la matrice densità, ρ. Scrivere ρ in termini di parametri di Stokes, ξ_i. Determinare gli operatori di proiezione su vari autostati, $s_z = +\frac{1}{2}$, $s_x = +\frac{1}{2}$, etc., e calcolare le probabilità, $P_{s_z=+\frac{1}{2}}$, etc., in termini di ξ_i, e determinare ξ_i, facendo uso dei valori dati.

Metodo alternativo: assumete che il sistema sia in uno stato puro, *i.e.*, descritto da una funzione d'onda generica, $\psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Calcolate le varie probabilità e verficate se esiste una soluzione per α, β.

Problema 2

Un oscillatore tridimensionale con spin $\frac{1}{2}$ è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = H_0 + g\,\mathbf{L}\cdot\mathbf{s}, \qquad H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\,\mathbf{r}^2}{2} \tag{1}$$

(i) Nell'approssimazione in cui l'ultimo termine di H ($\propto g$) è trascurato, dire qual'è l'energia e il grado di degenerazione del terzo e quarto livello energetico (*i.e.*, del secondo e del terzo livello eccitato).

[*3 punti*]

(ii) Dire, sempre nella stessa approssimazione ($g = 0$) ma considerando soltanto gli stati del terzo livello di cui al punto (i), quali sono i valori possibili del momento angolare (L) e del momento angolare totale (J).

[*3 punti*]

(iii) Se si tiene conto del termine spin-orbita ($\propto g$), in quanti sottolivelli si divide il livello di cui al punto [(ii)]? Quali sono le energie?

Si noti che opportune combinazioni degli autostati di H_0 *sono* autostati dell'Hamiltoniana totale.

[*2 punto*]

Problema 2 (Alternativo)

Una particella (con una carica elettrica q e con una massa M) si muove in un piano, con moto descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2M} + \frac{M\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \tag{2}$$

(i) Determinare l'energia e il grado di degenerazione dell'N-mo livello, $d(N)$. Per il livello fondamentale, $d(1) = 1$.

[*3 punti*]

(ii) Per un moto nel piano (x, y) esiste solo una componente del momento angolare, L_z. Visto che la (2) è invariante per rotazioni nel piano (x, y), L_z commuta con H. Dire quali sono i valori possibili di m (autovalore di L_z), nello stato fondamentale e nel primo stato di eccitazione.

[*2 punti*]

Si accende un campo magnetico debole in direzione perpendicolare al piano, che è descritto dal potenziale vettoriale,

$$\mathbf{A} = (-\frac{By}{2}, \frac{Bx}{2}, 0). \tag{3}$$

(iii) Scrivere l'Hamiltoniana in questo caso. [*2 punti*]

(iv) Determinare le energie degli stati di cui al punto (ii). [*2 punto*]

Nota: L'origine, o meglio la ragione, della degenerazione dei livelli al punto (i) va ricercata in una simmetria $SU(2)$ che diventa manifesta nella rappresentazione in termini degli operatori di creazione e di distruzione. Per lo scopo di questo esercizio, tuttavia, questa considerazione non è indispensabile.

Soluzione

Problema 1.

Con i parametri di Stokes, la matrice densità prende la forma,

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1-\xi_3 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

mentre i proiettori su vari autostati sono

$$|s_z = \frac{1}{2}\rangle\langle s_z = \frac{1}{2}| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad |s_x = \frac{1}{2}\rangle\langle s_x = \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

etc. Risulta che

$$\xi_3 = P(s_z = \frac{1}{2}) - P(s_z = -\frac{1}{2}) = 0.75 - 0.25 = 0.50; \tag{6}$$

$$\xi_1 = P(s_x = \frac{1}{2}) - P(s_x = -\frac{1}{2}) = 0; \tag{7}$$

$$\xi_2 = P(s_y = \frac{1}{2}) - P(s_y = -\frac{1}{2}) = 0.93 - 0.07 = 0.86. \tag{8}$$

Perciò

$$\sum_{i=1}^{3} \xi_i^2 \simeq 0.9896, \tag{9}$$

per cui si può dire che si tratta di uno stato puro in buona approssimazione.

Problema 2

(i)

$$E = \omega\hbar(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2}) = \omega\hbar(N + \frac{3}{2}), \qquad N = 0, 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

La degenerazione: il terzo livello corrisponde a $N = 2$, per cui ci sono sei stati $((2,0,0),(1,1,0)$ e permutazioni). Analogamente si ha dieci stati per $N = 3$.

(ii) Corrispondono a $L = 2, 0$ (stati pari). $J = \frac{5}{2}, \frac{3}{2}$ per $L = 2$; $J = \frac{1}{2}$, per $L = 0$.

(iii) Tre sottolivelli con correzioni

$$\begin{aligned} g\,\mathbf{L}\cdot\mathbf{s} &= \frac{g}{2}(\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{s}^2) \\ &= \begin{cases} g, & J = \frac{5}{2},\ L = 2, \\ -\frac{3g}{2}, & J = \frac{3}{2},\ L = 2, \\ 0, & J = \frac{1}{2},\ L = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{11}$$

Problema 2 (Alternativo)

(i)

$$E_N = \omega\hbar\,(N+1), \qquad N = n_1 + n_2, \quad n_i = 0, 1, 2, \ldots. \tag{12}$$

$d(N)$ è il numero delle coppie di interi non negativi (n_1, n_2) tale che la loro somma sia uguale a N. Perciò

$$d(N) = N. \tag{13}$$

(ii) La funzione d'onda dello stato fondamentale è

$$\propto e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)}, \tag{14}$$

che è invariante per rotazioni, per cui $m=0$. Gli stati del primo livello eccitato sono

$$x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)}, \quad y e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)}. \tag{15}$$

Consideriamo opportune combinazioni delle due,

$$\psi_1 = \text{cost.}\,(x+iy)\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)} = \text{cost.}\,r\,e^{i\phi}\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}, \tag{16}$$

$$\psi_2 = \text{cost.}\,(x-iy)\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)} = \text{cost.}\,r\,e^{-i\phi}\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}: \tag{17}$$

esse sono autostati di

$$L_z = -i\frac{\partial}{\partial\phi}, \tag{18}$$

con autovalori, $m=\pm 1$ rispettivamente.

(iii)

$$\begin{aligned} H &= \frac{(\mathbf{p}-\frac{q}{c}\mathbf{A})^2}{2M} + \frac{M\omega^2\,\mathbf{r}^2}{2} = \frac{(p_x+\frac{qBy}{2c})^2+(p_y-\frac{qBx}{2c})^2}{2M} + \frac{M\omega^2\,\mathbf{r}^2}{2} \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + \frac{M\Omega^2\mathbf{r}^2}{2} - \frac{qB\hbar}{2Mc}L_z, \qquad \Omega^2 = \omega^2 + \left(\frac{qB}{2Mc}\right)^2. \end{aligned} \tag{19}$$

(iv) Lo stato fondamentale ha l'energia $E_0 = \Omega\hbar$. Il primo livello si divide in due, con le energie

$$2\,\Omega\hbar \mp \frac{qB\hbar}{2Mc}. \tag{20}$$