Compitino 1 (bis) di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
29 novembre 2005 (A.A. 05/06)
(Tempo a disposizione: 3 ore.)

Problema 1

Una particella descritta dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2, \tag{1}$$

si trova, all'istante $t = 0$, nello stato (A è una costante con una dimensione di L^{-2})

$$\Phi_0(x) = c_A \, x \, e^{-\frac{A}{2} x^2}, \quad c_A = \left(\frac{4A^3}{\pi} \right)^{1/4}. \tag{2}$$

(i) (♣) Determinare, nello stato Φ_0, la distribuzione di probabilità per vari valori di impulso p, $P(p)$, a $t = 0$, e farne uno schizzo. [*2 punti*]

(ii) (♡) Esiste una Hamiltoniana di cui Φ_0 è un autostato? Determinare tale Hamiltoniana ($\tilde{H}$) e il relativo autovalore. [*3 punti*]

(iii) (♣) Calcolare il valor medio dell'energia (H) nello stato $|\Phi_0\rangle$. [*2 punti*]

(iv) (♡) La distribuzione di probabilità $P(x,t)$ per vari valori di x ha uno zero a $x = 0$, a $t = 0$. Trovare i valori di t tale che $P(0,t) = 0$. [*1 punto*]

Problema 2

Una particella è descritta dall'Hamiltoniana unidimensionale,

$$H = Q^\dagger Q, \qquad Q \equiv \frac{i \hat{p}}{\sqrt{2m}} + R(x), \qquad R(x) = g x^3, \qquad g > 0. \tag{3}$$

(i) (♡) Dimostrare che gli autovalori dell'energia di questo sistema sono tutti semi-positivi definiti. [*2 punti*]

(ii) (♣) Determinare il potenziale esplicitamente, e farne uno schizzo. [*2 punti*]

(iii) (♡) Si dimostri che la condizione *necessaria e sufficiente* per l'esistenza di uno stato fondamentale con $E_0 = 0$ è:

$$Q \, \psi_0(x) = 0, \qquad ||\psi_0|| < \infty. \tag{4}$$

[*2 punti*]

(iv) (♣) Trovare $\psi_0(x)$, integrando la (4) esplicitamente. (Non è necessario determinare la costante di normalizzazione.) [*2 punti*]

(v) (♡) Le proprietà di un altro sistema descritto dall'Hamiltoniana

$$H' = Q Q^\dagger \tag{5}$$

con lo stesso operatore Q, sono intimamente collegate a quelle del sistema H. Dimostrare in particolare che *tutti* i livelli energetici con $E > 0$ dei due sistemi sono identici, *i.e.*,

$$E^{(0)} = 0; \qquad E^{(n+1)} = E'^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{6}$$

[*1 punto*]

Formulario

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2n} e^{-x^2} = \begin{cases} \sqrt{\pi}, & n = 0, \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2}, & n = 1, \\ \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, & n = 2, \\ \frac{15\sqrt{\pi}}{8}, & n = 3. \end{cases} \tag{7}$$

Nota 1

I problemi contrassegnati con (♣) richiedono qualche calcolo; i problemi con (♡) richiedono soltanto un semplice ragionamento. Basta fare tre dei quattro problemi contrassegnati con (♣). Segnate CHIARAMENTE col simbolo ♣ i problemi che avete scelto. (È per questo motivo che la somma dei punti fa 17 invece di 15).

Nota 2

I problemi non sono logicamente ordinati sempre. Per esempio, nel Problema 1, la risoluzione del punto (ii) sarebbe utile per il punto (iii); altrimenti i punti possono essere risolti in qualsiasi ordine. Il punto (iv) del Problema 2 non richiede di avere risolto (iii).

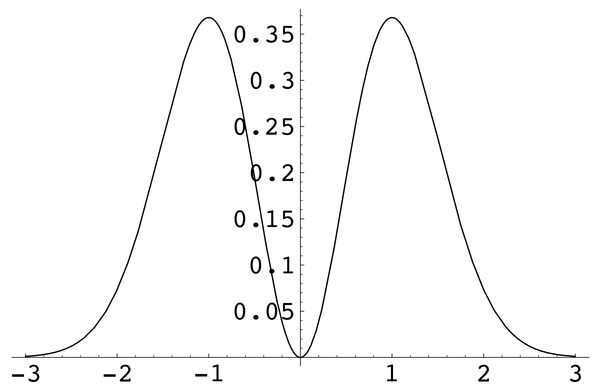

Figura 1:

Soluzione

Problema 1.

(i) La trasformata di Fourier di Φ_0 è (mettiamo $A=1$)

$$\int dx\, e^{ikx}\, x e^{-x^2/2} = \int dx\, e^{ikx}\, x e^{-\frac{1}{2}(x-ik)^2 - \frac{k^2}{2}}$$
$$= \quad e^{-\frac{k^2}{2}} \int dx\, e^{ikx}\,(x-ik+ik)\, e^{-(x-ik)^2} = \text{cost.}\, k\, e^{-\frac{k^2}{2}}. \tag{8}$$

La probabilità richiesta è (ripristinando A e normalizzando):

$$P(p) = C\, p^2\, e^{-\frac{p^2}{A\hbar^2}}, \qquad C = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(A\hbar^2)^{-3/2}. \tag{9}$$

(Vedi Fig.1).

(ii) Φ_0 è la funzione d'onda del primo stato ecccitato dell'oscillatore con ω_0,

$$\frac{m\,\omega_0}{\hbar} = A, \qquad \therefore \quad \omega_0 = \frac{A\,\hbar}{m}, \tag{10}$$

i.e.,

$$H' = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\, m\,\omega_0^2 x^2, \tag{11}$$

con autovalore, $\frac{3}{2}\omega_0\hbar$.

(iii)

$$\langle\Phi_0|H|\Phi_0\rangle = \langle\Phi_0|\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\, m\,\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2}\, m\,(\omega^2 - \omega_0^2)\, x^2|\Phi_0\rangle$$
$$= \quad \frac{3}{2}\omega_0\hbar + \frac{1}{2}\, m\,(\omega^2-\omega_0^2)\,\langle\Phi_0|x^2|\Phi_0\rangle. \tag{12}$$

Facendo uso del formulario, si ha

$$\langle\Phi_0|x^2|\Phi_0\rangle = c_A^2 \int dx\, x^4\, e^{-Ax^2} = \frac{3}{2A}, \tag{13}$$

perciò

$$\langle\Phi_0|H|\Phi_0\rangle = \frac{3}{2}\omega_0\hbar + \frac{3\,m}{4A}\,(\omega^2-\omega_0^2) = \frac{3\,A\,\hbar^2}{4\,m} + \frac{3\,m\,\omega^2}{4A}. \tag{14}$$

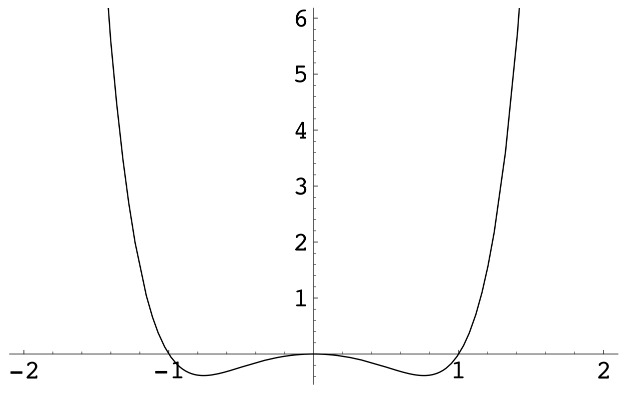

Figura 2:

(iv)

$$\Phi_0(x,0) = \sum_n c_n \psi_n(x), \quad n = 1,3,5,\ldots. \tag{15}$$

$$\Phi_0(x,t) = \sum_n c_n e^{-iE_nt/\hbar} \psi_n(x), \quad n = 1,3,5,\ldots. \tag{16}$$

Ogni ψ_n, n dispari ha un nodo a $x = 0$, quindi lo zero di Φ_0 a $x = 0$ resta per $\forall t$.

Problema 2.

(i)

$$\langle n|H|n\rangle = ||Q|n\rangle||^2 \geq 0. \tag{17}$$

(ii)

$$\begin{aligned} H &= (-\frac{ip}{\sqrt{2m}} + R(x))(\frac{ip}{\sqrt{2m}} + R(x)) = \frac{p^2}{2m} - \frac{i}{2m}[p, R(x)] + R(x)^2 \\ &= \frac{p^2}{2m} - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} R' + R(x)^2 = \frac{p^2}{2m} + V(x), \end{aligned} \tag{18}$$

quindi

$$V(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} R' + R(x)^2 = g^2 x^6 - \frac{3g\hbar}{\sqrt{2m}} x^2. \tag{19}$$

(Vedi Fig.2).

(iii)

$$\langle 0|H|0\rangle = ||Q|0\rangle||^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \quad Q|0\rangle = 0. \tag{20}$$

(iv)

$$(\frac{ip}{\sqrt{2m}} + R(x))\psi_0(x) = (\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + gx^3)\psi_0(x) = 0, \tag{21}$$

$$\frac{\psi_0'}{\psi_0} = -\frac{\sqrt{2m}\,g}{\hbar} x^3, \tag{22}$$

$$\psi_0(x) = \text{cost.}\, e^{-\frac{\sqrt{2m}g}{4\hbar} x^4}. \tag{23}$$

(v) Per un autostato non nullo qualsiasi di H,

$$Q^\dagger Q|E\rangle = E\,|E\rangle. \tag{24}$$

Segue che

$$Q\,Q^\dagger Q|E\rangle = E\,Q|E\rangle, \qquad Q\,Q^\dagger\,(Q|E\rangle) = E\,(Q|E\rangle), \tag{25}$$

perciò lo stato

$$|E'\rangle = \text{cost.}\,Q|E\rangle, \tag{26}$$

se non nullo (cioè $E > 0$), soddisfa

$$H'|E'\rangle = E\,|E'\rangle, \tag{27}$$

con lo stesso valore di energia. Si noti che lo stato $Q|E\rangle$ è normalizzabile poiché per uno stato con $E > 0$,

$$||Q|E\rangle||^2 = \langle E|Q^\dagger Q|E\rangle = E \neq 0. \tag{28}$$

Lo stesso argomento dimostra che lo stato fondamentale con $E = 0$ viene distrutto dall'operatore Q, per cui lo spettro di H' non contiene $E = 0$.