Compitino 1 di Meccanica Quantistica I (A)

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
4 novembre '09 (A.A. 09/10)

(Tempo a disposizione: 3 ore)

Problema 1.

Un sistema a tre livelli è descritto dall'Hamiltoniana,

$$H = E_0\,\mathbf{1} + \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ib \\ 0 & -ib & 0 \end{pmatrix}, \qquad a > b > 0.$$

(i) Trovare gli autovalori di H e gli autostati relativi. (*3 punti*)

(ii) Il sistema si trova nello stato fondamentale. A $t = 0$ si misura una variabile descritta dall'operatore

$$G = g \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad g > 0\,.$$

Dire quali sono i risultati possibili della misura e con quale probabilità relativa. (*2 punti*)

(iii) Supponiamo che la misura di cui al punto (ii) abbia dato il risultato minimo possibile, g_{Min}. Su questo sitema si ripete la misura di G all'istante t. Qual'è la probabilità $P_{gmin}(t)$ che la misura a t dà di nuovo come risultato g_{Min}? Esistono valori di t tale che $P_{gmin}(t) = 0$? (*2 punti*)

(iv) Se il risultato della misura di G fosse diverso da g_{Min}, il processo della misura non determinerebbe univocamente lo stato quantistico dopo la misura. Spiegare perché e trovare una nuova ossevabile (F) tale che una misura contemporanea di G e di F determini lo stato univocamente. È univoca tale scelta di F? (*1 punto*)

Problema 2.

Un oscilatore armonico descritto dall'Hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2},$$

si trova nello stato fondamentale ψ_0. All'istante $t = 0$, il centro della forza di richiamo si divide in due all'improvviso: si assuma che il sistema a $t \geq 0$ sia descritto da una nuova Hamiltoniana

$$H_1 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 (x-b)^2}{16} + \frac{m\omega^2 (x+b)^2}{16}\,,$$

ma che lo stato rimanga ψ_0 (a $t = 0+$). Si misura l'energia della particella subito dopo la scissione del centro.

(i) Qual'è l'energia e la funzione d'onda dello stato fondamentale della nuova Hamiltoniana, H_1? (*3 punti*)

(ii) Trovare la probabilità che la particella si trovi nello stato fondamentale della nuova Hamiltoniana. (*2 punti*)

(iii) Trovare la probabilità che la particella si trovi nel primo stato eccitato della nuova Hamiltoniana. (*1 punto*)

(iv) Trovare la probabilità che la particella si trovi nell'n-simo stato eccitato del nuovo sistema. (*1 punto*)

Per risolvere quest'ultimo problema, si usi il metodo degli operatori di creazione e di distruzione come segue:

(a) Determinare gli operatori $a, a^\dagger$ per l'oscillatore originale in termini di operatori x e p, e analogamente gli operatori $A, A^\dagger$ per l'oscillatore H_1 sempre in termini di operatori x e p. Esprimere $a, a^\dagger$ in termini di $A, A^\dagger$.

(b) Ponendo lo stato ψ_0 come

$$|\psi_0\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} c_N |N\rangle,$$

dove $|N\rangle$ sono gli stati di occupazioni del nuovo sistema, e imponendo che esso sia uguale allo stato fondamentale del sistema originale,

$$a|\psi_0\rangle = 0, \tag{1}$$

(dove a è espresso in termini di A e di $A^\dagger$), determinare c_N ($N \geq 1$) in termini di c_0, utilizzando una relazione di ricorrenza che segue dalla (1).

(c) Determinare c_0 (perciò tutti i c_N) imponendo la condizione di normalizzazione di $|\psi_0\rangle$.

Formulario: Usate, se è necessario, la formula

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma^{2n} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \,.$$

Soluzione

Problema 1.

(i) Diagonalizzando solo il secondo termine, si ha

$$E_2 = E_0 + a, \quad |E,2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$E_1 = E_0 + b, \quad |E,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix};$$

$$E_f = E_0 - b, \quad |E,f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

(ii) Gli autovalori sono $g, g, -g$, (perciò $g_{Min} = -g$) con rispettivi autostati

$$|G,g\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad |G,g\rangle_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad |G,-g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};$$

Nello stato $|E,f\rangle$ la probabilità di trovare i vari valori di G sono

$$P_{G,g} = |_1\langle G,g|E,f\rangle|^2 + |_2\langle G,g|E,f\rangle|^2 = \frac{3}{4};$$

$$P_{G,-g} = \langle G,-g|E,f\rangle|^2 = \frac{1}{4}.$$

(iii) La funzione d'onda dopo la misura è allora

$$\psi(0) = |G,-g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Esprimendo esso in termini di autostati dell'energia, si ha

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}|E,2\rangle - \frac{i}{2}|E,1\rangle + \frac{i}{2}|E,f\rangle.$$

Essa evolve nel tempo come

$$\psi(0) \to \psi(t) = e^{-iE_0t/\hbar}\,[\,e^{-iat/\hbar}\frac{1}{\sqrt{2}}|E,2\rangle - e^{-ibt/\hbar}\frac{i}{2}|E,1\rangle + e^{ibt/\hbar}\frac{i}{2}|E,f\rangle\,].$$

La probabilità di trovare $G = g_{min}$ a tempo t è allora data da

$$P_{gmin}(t) = |\langle G,-g|\psi(t)\rangle|^2,$$

ma

$$\begin{aligned}
\langle G,-g|\psi(t)\rangle &= e^{-iE_0t/\hbar}\,[\,e^{-iat/\hbar}\frac{1}{\sqrt{2}}\langle G,-g|E,2\rangle - e^{-ibt/\hbar}\frac{i}{2}\langle G,-g|E,1\rangle + e^{ibt/\hbar}\frac{i}{2}\langle G,-g|E,f\rangle\,] \\
&= e^{-iE_0t/\hbar}\,[\,e^{-iat/\hbar}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + e^{-ibt/\hbar}\frac{i}{2}\frac{-i}{2} - e^{ibt/\hbar}\frac{i}{2}\frac{i}{2}\,] \\
&= \frac{e^{-iE_0t/\hbar}}{2}\,[\,e^{-iat/\hbar} + \cos\frac{bt}{\hbar}\,] = \frac{e^{-iE_0t/\hbar}}{2}\,[\cos\frac{bt}{\hbar} + \cos\frac{at}{\hbar} - i\sin\frac{at}{\hbar}\,] \qquad (2)
\end{aligned}$$

Perciò

$$P_{gmin}(t) = \frac{1}{4}\,[\,(\cos\frac{bt}{\hbar} + \cos\frac{at}{\hbar})^2 + \sin^2\frac{at}{\hbar}\,]$$

L'annullamento di questo richiede che siano soddisfatte

$$\sin^2\frac{at}{\hbar} = 0, \qquad \cos\frac{bt}{\hbar} + \cos\frac{at}{\hbar} = 0$$

contemporaneamente. Il primo dice che

$$t = \frac{\pi\hbar}{a}\,n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

i secondo (utilizzando sopra)

$$\cos\frac{\pi b n}{a} + (-)^n = 0.$$

Per $n = 2m$ (pari) questo significa che

$$\frac{2m\pi b}{a} = \pi(2\ell+1), \qquad \frac{b}{a} = \frac{2\ell+1}{2m};$$

per $n = 2\ell+1$ (dispari) invece si ha

$$\frac{(2\ell+1)\pi b}{a} = 2m\pi, \qquad \frac{b}{a} = \frac{2m}{2\ell+1};$$

perciò esistono tempi tali che $P_{gmin}(t) = 0$, per qualsiasi valore razionale di $b/a < 1$. Vice versa per b/a non razionale non è possibile che $P_{gmin}(t)$ attiene il valore nullo.

Problema 2.

(i)

$$H_1 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{8} + \frac{m\omega^2 b^2}{8}\ .$$

Questo è un oscillatore armonico con

$$\omega_1 = \omega/2,$$

perciò

$$E_0 = \frac{\omega_1\hbar}{2} + \frac{m\omega^2 b^2}{8}, \qquad \phi_0 = \left(\frac{m\omega_1}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega_1}{2\hbar}x^2},$$

(ii)

$$P_0 = |\langle\phi_0|\psi_0\rangle|^2 = |\left(\frac{m\omega_1}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\int dx\, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2\hbar}(\omega+\omega_1)x^2}|^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \simeq 0{,}943$$

(iii) Nulla (per parità).

(iv) Utilizzando la relazione tra $a, a^\dagger$ e (x,p), e l'analoga relazione tra $A, A^\dagger$ e (x,p), si trova la relazione richiesta:

$$a = \frac{1}{2\sqrt{2}}(3A + A^\dagger); \qquad a^\dagger = \frac{1}{2\sqrt{2}}(3A^\dagger + A);$$

l'inverso è

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}}(3a - a^\dagger); \qquad A^\dagger = \frac{1}{2\sqrt{2}}(3a^\dagger - a).$$

Si verifica che

$$[A, A^\dagger] = 1, \quad \longleftrightarrow \quad [a, a^\dagger] = 1,$$

Dalla condizione

$$a\,|\psi_0\rangle = 0,$$

segue

$$(3A + A^\dagger)\sum_{N=0}^{\infty} c_N |N\rangle = 0\,,$$

$$\sum (3\sqrt{N+1}c_{N+1} + c_{N-1}\sqrt{N})|N\rangle = 0\,,$$

i.e.,

$$3\sqrt{N+1}c_{N+1} + c_{N-1}\sqrt{N} = 0, \qquad \forall N, \qquad \therefore \quad c_{N+1} = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{N}{N+1}}\,c_{N-1}\,. \quad (3)$$

Notiamo che ψ_0, essendo pari, contiene soltanto c_N con N pari. Pertanto la (3) è sufficiente per determinare tutti i coefficienti c_N in termini di c_0. Infatti,

$$c_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}\,c_0, \quad c_4 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{3}{4}}\,c_0 \quad \text{etc.},$$

e per $2m$-simo coefficiente,

$$c_{2m} = \left(-\frac{1}{3}\right)^m \sqrt{\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}}\,c_0\,.$$

Ora la normalizzazione (probabilotà totale) è data da

$$1 = \sum_{m=0}^{\infty} |c_{2m}|^2 = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2m}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}|c_0|^2$$

Ora

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2m}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} = \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

per cui

$$|c_0|^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

che riproduce il risultato del punto (i). Per l'N-simo stato la probabilità è data da:

$$P_N = \left(\frac{1}{3}\right)^N \frac{(N-1)!!}{N!!}\frac{2\sqrt{2}}{3}, \qquad N \text{ pari},$$

e $P_N = 0$ per N dispari.