Compitino 1 di Meccanica Quantistica I (A)

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
6 novembre '07 (A.A. 07/08)

(Tempo a disposizione: 3 ore)

Problema 1.

Si consideri un sistema "a tre stati". L'Hamiltoniana è data da

$$H = E_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad E_0 > 0 . \tag{1}$$

mentre un osservabile F è descritto dall'operatore:

$$F = f \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad f > 0 . \tag{2}$$

(i) Dire se la variabile F e l'energia H sono compatibili; F è conservato?

(ii) Trovare gli autovalori e i rispettivi autovettori di H e di F.

(iii) Esprimere ciascun autostato di F in termini degli autostati dell'energia, e vice versa.

(iv) Supponiamo che la misura di F fatta all'istante $t = 0$ abbia dato il risultato minimo per F. *Sapendo* questo, si misura F di nuovo, all'istante t. Qual'è la probabilità che la misura dia come risultato il valore massimo di F?

(v) [*Opzionale*] Sapendo che la misura di cui al punto (iv) abbia infatti dato il valore massimo di F, calcolare la probabilità che la misura fatta dopo un ulteriore intervallo di tempo t dia il valore minimo di F.

Esprimete le risposte ai punti (iv) ed eventualmente (v), in termini di $C \equiv \cos \frac{E_0 t}{\hbar}$.

Problema 2.

Una particella di massa m si muove in un potenziale uni-dimensionale,

$$V(x) \begin{cases} \infty, & x < 0 , \\ -V_0 , & 0 \le x \le a , \\ 0, & x > a , \end{cases}$$

con $V_0 > 0$ (Fig.1). Si vuole esaminare lo spettro del sistema.

(i) Determinare come il numero degli stati legati (spettro discreto) dipende dai parametri, m, a, V_0.

(ii) Determinare lo spettro continuo e rispettive funzioni d'onda. Dire se ci sono delle degenerazioni.

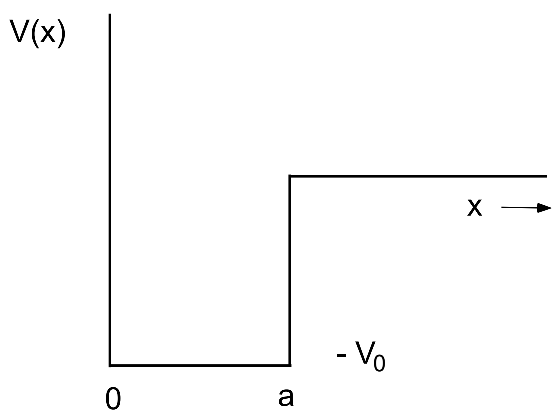

Figura 1:

Soluzione

Problema 1.

(i)

$$[F,H] = f E_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \,.$$

Sono incompatibili. Dunque F non è conservato.

(ii) Gli autovalori di H sono $E_0, 0, -E_0$ con rispettive autovettori

$$|H,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad |H,0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad |H,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di F sono $f, f, -f$ con rispettive autovettori

$$|F,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad |F,1'\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad |F,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(iii)

$$|H,1\rangle = \frac{1}{2}\left(|F,1\rangle + |F,-1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}|F,1'\rangle; \qquad |H,-1\rangle = \frac{1}{2}\left(|F,1\rangle + |F,-1\rangle\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}|F,1'\rangle;$$

$$|H,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}i}\left(|F,1\rangle - |F,-1\rangle\right) \,.$$

$$|F,1\rangle = \frac{1}{2}\left(|H,1\rangle + |H,-1\rangle\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}|H,0\rangle; \qquad |F,-1\rangle = \frac{1}{2}\left(|H,1\rangle + |H,-1\rangle\right) - \frac{i}{\sqrt{2}}|H,0\rangle;$$

$$|F,1'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H,1\rangle - |H,-1\rangle\right) \,.$$

(iv)

$$|\psi(0)\rangle = |F,-1\rangle = \frac{1}{2}\left(|H,1\rangle + |H,-1\rangle\right) - \frac{i}{\sqrt{2}}|H,0\rangle;$$

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \tfrac{1}{2}\left(e^{-iE_0t/\hbar}|H,1\rangle + e^{iE_0t/\hbar}|H,-1\rangle\right) - \tfrac{i}{\sqrt{2}}|H,0\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\cos\tfrac{E_0t}{\hbar}\left(|F,1\rangle + |F,-1\rangle\right) - i\sqrt{2}\sin\tfrac{E_0t}{\hbar}|F,1'\rangle\right] - \tfrac{1}{2}\left(|F,1\rangle - |F,-1\rangle\right) \\ &= \tfrac{1}{2}(\cos\tfrac{E_0t}{\hbar} - 1)\,|F,1\rangle + \tfrac{1}{2}(\cos\tfrac{E_0t}{\hbar} + 1)\,|F,-1\rangle - \tfrac{i}{\sqrt{2}}\sin\tfrac{E_0t}{\hbar}\,|F,1'\rangle \end{aligned} \tag{3}$$

La probabilità che la misura di F dia $+f$ è allora:

$$P_f = \frac{1}{4}(\cos\frac{E_0t}{\hbar} - 1)^2 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{E_0t}{\hbar} = 1 - \frac{1}{4}(\cos\frac{E_0t}{\hbar} + 1)^2 = \frac{3-2C-C^2}{4} = \frac{(3+C)(1-C)}{4}.$$

dove

$$C \equiv \cos\frac{E_0t}{\hbar} \,.$$

(v) [**Opzionale**] Lo stato è dato all'istante t, dall'eq. (3):

$$|\psi(t)\rangle = \alpha|F,1\rangle + \beta|F,1'\rangle + \gamma|F,-1\rangle \;, \tag{4}$$

dove

$$\alpha = \frac{1}{2}(\cos\frac{E_0 t}{\hbar} - 1) = \frac{C-1}{2}; \quad \beta = -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\frac{E_0 t}{\hbar} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{1-C^2};$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(\cos\frac{E_0 t}{\hbar} + 1) = \frac{C+1}{2} \;.$$

La probabilità che la misura di F dà $F = +f$ è perciò

$$P_f = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = \frac{(3+C)(1-C)}{4}, \qquad C \equiv \cos\frac{E_0 t}{\hbar} \;,$$

ma ora il problema è sapere lo stato *immediatamente dopo* la misura, *sapendo* che la misura di F ha dato il risultato $F = +f$.

Ci sono vari casi possibili, ma è opportuno fare delle considerazioni preliminari, sugli stati nel sottospazio con $F = +f$. Lo stato *un'istante prima* della misura di F, normalizzato, se ci limitiamo al sottospazio con $F = f$, è

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{|\alpha|^2+|\beta|^2}}\left[\,\alpha|F,1\rangle + \beta|F,1'\rangle\,\right] \tag{5}$$

Dei due possibili stati linearmente indipendenti (visto che l'autovalore $F = f$ è doppiamente degenere) l'evoluzione ha prodotto lo stato ψ_1, mentre l'altro stato indipendente

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{|\alpha|^2+|\beta|^2}}\left[\,\beta^*|F,1\rangle - \alpha^*|F,1'\rangle\,\right] \;. \tag{6}$$

è assente.

Consideriamo i vari operatori di proiezione.

$$\Pi_1 \equiv |\psi_1\rangle\langle\psi_1|;$$

è l'operatore che dà 1 sullo stato $|\psi_1\rangle$ e 0 sullo stato $|\psi_2\rangle$;

$$\Pi_2 \equiv |\psi_2\rangle\langle\psi_2|;$$

l'operatore che dà 0 sullo stato $|\psi_1\rangle$ e 1 sullo stato $|\psi_2\rangle$;

$$\Pi \equiv |F1\rangle\langle F1|;$$

è l'operatore che dà 1 sullo stato $||F1\rangle\rangle$ e 0 sullo stato $||F1'\rangle\rangle$;

$$\Pi' \equiv |F1'\rangle\langle F1'|;$$

è l'operatore che dà 0 sullo stato $||F1\rangle\rangle$ e 1 sullo stato $||F1'\rangle\rangle$. Analogamente si può considerare altre scelte per il "disturbo-misura".

Visto che F in questo sottospazio è proporzionale all'operatore unità, F commuta con tutti gli operatori, $\Pi_1, \Pi_2, \Pi, \Pi', \ldots$. La misura di ognuno di questi osservabili è compatibile con quella di F.

Caso I

Se la misura di F è "pulita", i.e., non coinvolge una simultanea determinazione di nessuna di questi osservabili (Π, per es.), allora il risultato della misura di F (che ha dato $F=+f$) sarà lo stato ψ_1: lo stato all'istante $2t$ è dato da

$$|\psi_1\rangle \to |\psi_1\rangle|_t = \frac{1}{\sqrt{|\alpha|^2+|\beta|^2}}\left[\alpha|F,1\rangle|_t+\beta|F,1'\rangle|_t.\right] \tag{7}$$

Lo stato $|F,1\rangle$ evolve come

$$\begin{aligned}|F,1\rangle \to |F,1\rangle|_t &= \tfrac{1}{2}\left(e^{-iE_0t/\hbar}|H,1\rangle+e^{iE_0t/\hbar}|H,-1\rangle\right)+\tfrac{i}{\sqrt{2}}|H,0\rangle\\ &= \tfrac{1}{2}\left[\cos\tfrac{E_0t}{\hbar}\left(|F,1\rangle+|F,-1\rangle\right)-i\sqrt{2}\sin\tfrac{E_0t}{\hbar}|F,1'\rangle\right]+\tfrac{1}{2}\left(|F,1\rangle-|F,-1\rangle\right)\\ &= \tfrac{1}{2}(\cos\tfrac{E_0t}{\hbar}+1)\,|F,1\rangle+\tfrac{1}{2}(\cos\tfrac{E_0t}{\hbar}-1)\,|F,-1\rangle-\tfrac{i}{\sqrt{2}}\sin\tfrac{E_0t}{\hbar}|F,1'\rangle\end{aligned}$$

mentre $|F,1'\rangle$ evolve come

$$\begin{aligned}|F,1'\rangle \to |F,1'\rangle|_t &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_0t/\hbar}|H,1\rangle-e^{iE_0t/\hbar}|H,-1\rangle\right)\\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{2}\cos\tfrac{E_0t}{\hbar}|F,1'\rangle-i\sin\tfrac{E_0t}{\hbar}\left(|F,1\rangle+|F,-1\rangle\right)\right]\ ,\end{aligned}$$

perciò si avrtà all'istante $2t$:

$$\begin{aligned}|F,1\rangle|_t &= \tfrac{1}{\sqrt{|\alpha|^2+|\beta|^2}}\left[\left(\tfrac{\alpha}{2}(\cos\tfrac{E_0t}{\hbar}-1)-\tfrac{i\beta\sin\frac{E_0t}{\hbar}}{\sqrt{2}}\right)|F,-1\rangle+\ldots\right]\\ &= \tfrac{1}{\sqrt{|\alpha|^2+|\beta|^2}}\left[\left(\tfrac{(C-1)^2}{4}-\tfrac{1}{2}(1-C^2)\right)|F,-1\rangle+\ldots\right]=\tfrac{(3C+1)(C-1)}{4\sqrt{|\alpha|^2+|\beta|^2}}\,|F,-1\rangle+\ldots\end{aligned} \tag{8}$$

La probabilità di trovare $F=-f$ all'istante $2t$ è dunque data da:

$$\frac{1}{|\alpha|^2+|\beta|^2}\frac{(1-C)^2(1+3C)^2}{16}=\frac{(1-C)(1+3C)^2}{4(3+C)}\ . \tag{9}$$

Caso II

Consideriamo invece la possibilità che la misura di F sia tale che, accidentalmente, si "misura" anche Π, anche se il risultato di quest'ultimo non viene registrato. In questo caso, *sapendo* che il risultato della misura era comunque $+f$, sappiamo che abbiamo l'autostato $|F,1\rangle$ (il risultato $\Pi=1$) con probabilità relativa

$$P_1=\frac{\frac{1}{4}(C-1)^2}{P_f},\qquad C\equiv\cos\frac{E_0t}{\hbar}\ .$$

e lo stato $|F,1'\rangle$ (il risultato $\Pi=0$) con probabilità relativa

$$P_1'=\frac{\frac{1}{2}\sin^2\frac{E_0t}{\hbar}}{P_f}=\frac{\frac{1}{2}(1-C^2)}{P_f}\ ;$$

con $P_1+P_1'=1$. Lo stato $|F,1\rangle$ evolve come

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= \tfrac{1}{2}\left(e^{-iE_0t/\hbar}|H,1\rangle+e^{iE_0t/\hbar}|H,-1\rangle\right)+\tfrac{i}{\sqrt{2}}|H,0\rangle\\ &= \tfrac{1}{2}\left[\cos\tfrac{E_0t}{\hbar}\left(|F,1\rangle+|F,-1\rangle\right)-i\sqrt{2}\sin\tfrac{E_0t}{\hbar}|F,1'\rangle\right]+\tfrac{1}{2}\left(|F,1\rangle-|F,-1\rangle\right)\\ &= \tfrac{1}{2}(\cos\tfrac{E_0t}{\hbar}+1)\,|F,1\rangle+\tfrac{1}{2}(\cos\tfrac{E_0t}{\hbar}-1)\,|F,-1\rangle-\tfrac{i}{\sqrt{2}}\sin\tfrac{E_0t}{\hbar}|F,1'\rangle\end{aligned}$$

con la probabilità di produrre lo stato $|F,-1\rangle$ dopo l'intervallo t,

$$\frac{1}{4}(C-1)^2\ ;$$

mentre lo stato $|F,1'\rangle$ evolve come

$$|\psi(t)'\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_0t/\hbar}|H,1\rangle - e^{iE_0t/\hbar}|H,-1\rangle\right)$$
$$= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{2}\cos\tfrac{E_0t}{\hbar}|F,1'\rangle - i\sin\tfrac{E_0t}{\hbar}\left(|F,1\rangle - |F,-1\rangle\right)\right] \ ,$$

con la probabilità di produrre lo stato $|F,-1\rangle$

$$\frac{1}{2}\sin^2\frac{E_0t}{\hbar} = \frac{1}{2}(1-C^2) \ .$$

La probabilità di trovare $F=-f$ all'istante $2t$ è quindi la somma di probabilità composte (Figura 2, come funzione di $E_0t/\hbar$);

$$P = P_1 \cdot \frac{1}{4}(\cos\frac{E_0t}{\hbar}-1)^2 + P_1' \cdot \frac{1}{2}\sin^2\frac{E_0t}{\hbar} = \frac{5+C-C^2-5C^3}{4(3+C)} \ . \qquad (10)$$

Morale:

I due risultati, eq.(9) e eq.(10), in due esperimenti ("pulito" e "sporco") differiscono per il termine di interferenza tra le due ampiezze nell'eq.(8). Studiando perciò la probabilità $P(F=-f)$, e confrontando la teoria con i dati, in principio siamo in grado di dire se la "misura" o "il disturbo" è stato eseguito sul sistema. La crittografia quantistica è basata su un principio analogo. Nel secondo caso la coerenza tra i due termini (nello stato Ψ_1) viene distrutta, il sistema diventa uno "stato misto" (vedi Sez. 4.9 della "Meccanica Quantistica: nuova introduzione").

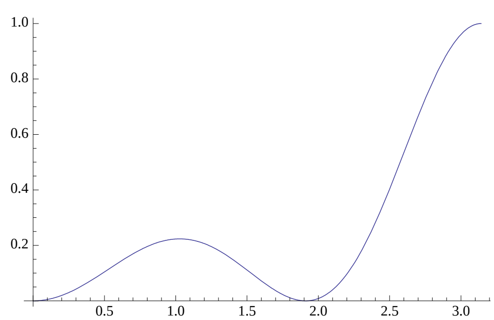

Figura 2: La dipendenza di $P(F=-f)$ come funzione di $E_0t/\hbar$, nell'esperimento "pulito"

Problema 2.

(i) Consideriamo $-V_0 < E < 0$ prima. La funzione d'onda ha la forma

$$\psi_I(x) = \sin qx, \qquad 0 \le x \le a, \qquad q = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar} > 0;$$

e

$$\psi_{II}(x) = A\,e^{-\kappa x}, \qquad x > a, \qquad \kappa = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} > 0 \ .$$

La condizione di continuità a $x=a$ impone:

$$\sin qa = A\,e^{-\kappa a}, \qquad q\cos qa = -\kappa A\,e^{-\kappa a},$$

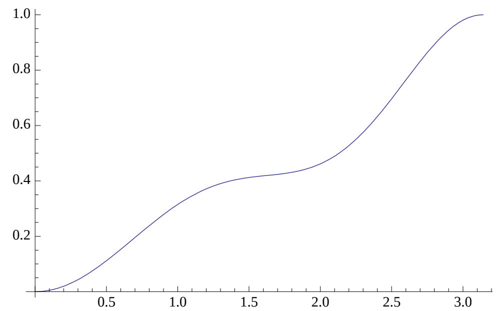

Figura 3: La dipendenza di $P(F=-f)$ come funzione di $E_0 t/\hbar$, in un esperimento "sporco"

i.e.,

$$\eta = -\xi \cot \xi,$$

dove

$$\xi \equiv q\,a = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}a}{\hbar}; \qquad \eta \equiv \kappa a = \frac{\sqrt{-2mE}a}{\hbar}\ ,$$

con

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}\ .$$

Dai grafici di queste curve si ha che per

$$\sqrt{\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}} \leq \frac{\pi}{2}$$

non esistono stati legati; per

$$\frac{\pi}{2} < \sqrt{\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}} \leq \frac{3\pi}{2}$$

esiste un solo stato legato, etc.; in generale, per

$$\frac{(2n-1)\pi}{2} < \sqrt{\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}} \leq \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

troviamo n stati legati.

(ii) Per $E \geq 0$ la funzione d'onda ha la forma

$$\psi_I(x) = \sin qx, \qquad 0 \leq x \leq a, \qquad q = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar} > 0;$$

e

$$\psi_{II}(x) = A\,e^{ikx} + B\,e^{-ikx}, \qquad x > a, \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \geq 0\ .$$

La condizione di continuità a $x = a$ impone:

$$\sin qa = A\,e^{ika} + B\,e^{-ika}, \qquad q\cos qa = ik\,(A\,e^{ika} - B\,e^{-ika})\ .$$

o

$$\begin{pmatrix} e^{ika} & e^{-ika} \\ e^{ika} & -e^{-ika} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin qa \\ \frac{iq}{k}\cos qa \end{pmatrix}\ . \tag{11}$$

Visto che
$$\det\begin{pmatrix} e^{ika} & e^{-ika} \\ e^{ika} & -e^{-ika} \end{pmatrix} = -2 \neq 0,$$
la (11) ha un'unica soluzione, per generici valori di m, V_0, a:
$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-ika} & e^{-ika} \\ e^{ika} & -e^{ika} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin qa \\ \frac{iq}{k}\cos qa \end{pmatrix}.$$
Vuol dire che per ogni valore di $k \geq 0$, perciò per ogni valore di $E \geq 0$, esiste un'unica soluzione. Lo spettro continuo è
$$E \geq 0\,,$$
non ci sono degenerazioni. Quest'ultimo risultato può essere ottenuto anche notando che la dimostrazione del teorema di non-degenerazione di stati *discreti* in una dimensione si applica ugualmente in questo caso, visto che la funzione d'onda si deve annullare a $r = 0$.