Compitino 1 di Meccanica Quantistica I (A)

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
7 novembre 2006 (A.A. 06/07)

Problema 1.

Un sistema "a due stati" è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = E_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

In questo sistema si considera la misura di due variabili A e B, descritte dagli operatori

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2}i \\ \sqrt{2}i & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Gli autovalori e autovettori ortonormali di A sono dati da:

$$|A,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad |A,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \tag{3}$$

come si può facilmente verificare.

(i) Trovare gli autovalori e i rispettivi autovettori di B.

(ii) Dire se le variabili A e B sono compatibili, e se sono conservate.

(iii) Supponiamo che la misura di A abbia dato il risultato $A = 1$. Quali sarebbero i risultati possibili di una misura di B, e quali sarebbero le probabilità rispettive, se questa misura fosse eseguita immediatamente dopo la misura di A?

(iv) Lo stesso sistema è sottoposto ad una seconda misura di A. Quale sarebbe la probabilità di trovare il risultato $A = 1$, nei seguenti casi diversi? (Fig.1)

(a) La misura di B non è fatta, e la seconda misura di A è fatta immediatamente dopo la prima misura di A di cui al punto (iii) ;

(b) La misura di B non è fatta, e la seconda misura di A è fatta dopo un intervallo di tempo (t) rispetto alla prima;

(c) La misura di B è stata eseguita, e l'osservatore di A sa che quest'ultima ha dato come risultato b_1 (l'autovalore più grande di B);

(d) La misura di B è fatta, ma chi misura A (immediatamente dopo la misura di B), non è a conoscenza del risultato di B.

Problema 2.

Una particella di massa m si muove in un potenziale unidimensionale (Fig. 2)

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x), \qquad V(x) = \begin{cases} \infty & x < -\frac{a}{2},\ x > \frac{a}{2}, \\ -g\,\delta(x), & -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}. \end{cases}, \qquad g > 0. \tag{4}$$

Si vuole studiare lo stato fondamentale, o con E positiva o negativa. Prima si considerino le possibili soluzioni con $E < 0$.

(i) Ponendo $E < 0$, scrivere la soluzione generale dell'equazione di Schrödinger in $0 < x < \frac{a}{2}$, senza tenere conto delle condizioni al contorno.

(ii) Imporre le condizioni appropriate a $x = 0$ e la condizione al contorno a $x = \frac{a}{2}$, assumendo che la funzione d'onda sia pari [1]. Trovare l'equazione che determina implicitamente il livello di energia ($E < 0$).

(iii) Studiando questa equazione (per es., graficamente) trovare il criterio (sulle costanti $m, g, \hbar, a$) per l'esistenza (o l'assenza) di un autostato (o di più autostati) di energia $E < 0$.

Ora ripetiamo l'analisi per $E > 0$, e sempre assumendo una funzione d'onda pari, $\psi(-x) = \psi(x)$.

(iv) Ponendo $E > 0$, scrivere la soluzione generale dell'equazione di Schrödinger in $0 < x < \frac{a}{2}$, senza tenere conto delle condizioni al contorno.

(v) Imporre le condizioni a $x = 0$ e la condizione al contorno a $x = \frac{a}{2}$, assumendo [2] $\psi(-x) = \psi(x)$. Trovare l'equazione che determina implicitamente il livello di energia ($E > 0$).

(vi) Studiando tale equazione trovare il criterio (sulle costanti $m, g, \hbar, a$) per l'esistenza (o per l'assenza) di un autostato (o di più autostati) con energia,

$$0 < E < \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}.$$

(vii) [*Opzionale*:] Paragonare i risultati dei punti (iii) e (vi) e discutere le eventuali relazioni tra di essi. È mai possibile che lo stato fondamentale del sistema (4) abbia esattamente $E = 0$?

[1] Si può dimostrare che la soluzione dispari con $E < 0$ non esiste in questo sistema, ma lo assumiamo qui, per risparmiare il tempo.

[2] Si può facilmente dimostrare che esistono soluzioni dispari con $E > 0$, con $E_n = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2ma^2}$, $n = 2, 4, 6, \ldots$; ma visto che uno stato dispari non è mai lo stato fondamentale di (4) qui ci limitiamo allo studio di uno stato pari.

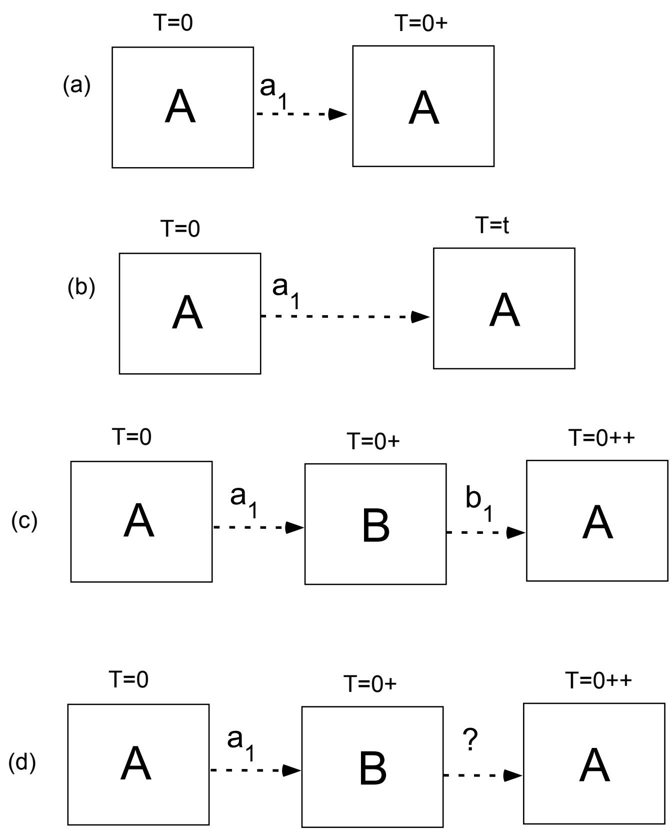

Figura 1:

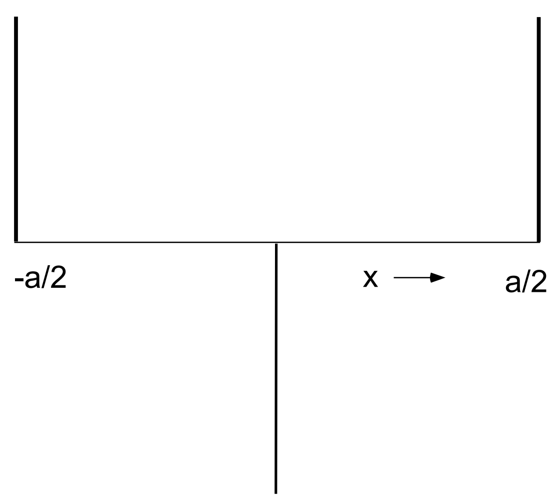

Figura 2:

Soluzione

Problema 1.

(i) Gli autovalori B sono $3, 0$. Gli autostati corrispondenti sono:

$$|B,3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\,i \\ 1 \end{pmatrix}; \quad |B,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}\,i \end{pmatrix} \tag{5}$$

(ii) $[A,B] \neq 0$ quindi non sono compatibili. A e B non commutano neanche con H: né A né B è conservato.

(iii) Lo stato dopo la misura di A è

$$|A,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \tag{6}$$

La misura di B darebbe $B = 3$ o $B = 0$, con rispettive probabilità,

$$P(B=3) = |\langle B,3|A,1\rangle|^2 = |\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}|^2 = \frac{3+2\sqrt{2}}{6} \simeq 0.97; \tag{7}$$

$$P(B=0) = |\langle B,0|A,1\rangle|^2 = |\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}\,i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}|^2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{6} \simeq 0.03. \tag{8}$$

(iv) **(a)** Probabilità 1.

(b) Lo stato evolve come

$$|A,1\rangle \to |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-iE_0t/\hbar} \\ i\,e^{iE_0t/\hbar} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Le probabilità per vari risultati per A sono

$$P(A,1)|_t = |\langle A,1|\psi(t)\rangle|^2 = |\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-iE_0t/\hbar} \\ i\,e^{iE_0t/\hbar} \end{pmatrix}|^2 = \cos^2 \frac{E_0t}{\hbar}; \tag{10}$$

$$P(A,-1)|_t = |\langle A,-1|\psi(t)\rangle|^2 = |\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-iE_0t/\hbar} \\ i\,e^{iE_0t/\hbar} \end{pmatrix}|^2 = \sin^2 \frac{E_0t}{\hbar}; \tag{11}$$

(c) Lo stato dopo la misura di B è $|B,3\rangle$. La probabilità richiesta è allora

$$P(A,1)|_{t=0+} = |\langle A,1|B,3\rangle|^2|^2 = |\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\,i \\ 1 \end{pmatrix}|^2 = 0.97; \tag{12}$$

(d) La probabilità per $A = 1$ è in questo caso la somma delle probabilià composte

$$|\langle A,1|B,3\rangle|^2 \cdot P(B,3) + |\langle A,1|B,0\rangle|^2 \cdot P(B,0) = (0.97)^2 + (0.03)^2 \simeq 0.94. \tag{13}$$

Problema 2.

(i)

$$\psi(x)|_+ = A\,e^{-\kappa x} + B\,e^{\kappa x}, \qquad \psi(x)|_- = A\,e^{\kappa x} + B\,e^{-\kappa x}, \qquad \kappa = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}, \tag{14}$$

dove ψ_+ e ψ_- sono le funzioni d'onda nella regione $x > 0$ e nella regione $x < 0$, rispettivamente.

(ii) La condizione a $x = a/2$ è

$$\psi(\frac{a}{2})|_+ = A\, e^{-\kappa a/2} + B\, e^{\kappa a/2} = 0, \tag{15}$$

mentre la condizione a $x = 0$ è data dalla formula

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\psi'_+(0) - \psi'_-(0)) - g\,\psi(0) = 0. \tag{16}$$

(la continuità della funzione d'onda stessa è garantita dall'ipotesi, la (14)). Si ha

$$\frac{\hbar^2\kappa}{m}(A - B) - g\,(A + B) = 0. \tag{17}$$

Dalla (17) si ha

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{\hbar^2\kappa}{mg} + 1}{\frac{\hbar^2\kappa}{mg} - 1} = \frac{\kappa + \frac{mg}{\hbar^2}}{\kappa - \frac{mg}{\hbar^2}} \tag{18}$$

mentre (15) dà

$$\frac{A}{B} = -e^{\kappa a}, \tag{19}$$

per cui la condizione implicita sull'energia è

$$e^{\kappa a} = -\frac{\kappa + \frac{mg}{\hbar^2}}{\kappa - \frac{mg}{\hbar^2}}; \qquad \frac{\kappa\hbar^2}{mg} = \tanh\frac{\kappa a}{2}. \tag{20}$$

(iii) Dal grafico delle due curve (paragonando la derivata a $x = 0$) si avvince che il criterio dell'esistenza (o l'assenza) di una soluzione con $E < 0$ è

$$a > \frac{2\hbar^2}{mg}. \qquad \text{(viceversa)} \quad a < \frac{2\hbar^2}{mg}. \tag{21}$$

(iv) Per $E > 0$ la soluzione generale è

$$\psi(x)|_+ = C\cos kx + D\sin kx, \qquad \psi(x)|_- = C\cos kx - D\sin kx, \qquad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \tag{22}$$

(v) La condizione a $x = \frac{a}{2}$ è

$$C\cos ka/2 + D\sin ka/2 = 0, \qquad \therefore \quad \tan\frac{ka}{2} = -\frac{C}{D}. \tag{23}$$

La condizione a $x = 0$ è

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(2Dk) - gC = 0. \qquad \therefore \quad \frac{\hbar^2 k}{mg} = -\frac{C}{D}, \tag{24}$$

per cui

$$\frac{\hbar^2 k}{mg} = \tan\frac{ka}{2}. \tag{25}$$

Naturalmente questa equazione si trova anche ponendo semplicemente $\kappa \to ik$ nella (20). Dal grafico si vede facilmente (paragonando lo slope a $k = 0$ dei due membri) che il criterio per l'esistenza (assenza) di una soluzione nell'intervallo $k < \frac{\pi}{a}$ è

$$\frac{\hbar^2}{mg} > \frac{a}{2}. \qquad \text{(viceversa)} \quad \frac{\hbar^2}{mg} < \frac{a}{2}. \tag{26}$$

(vi) I criteri (21) e (26) sono complimentari. In altre parole, lo stato fondamentale ha o $E < 0$ con la funzione d'onda (14) ($a > \frac{2\hbar^2}{mg}$), o $E > 0$ con la funzione d'onda (22) ($a < \frac{2\hbar^2}{mg}$). Fig. 3 e Fig. 4. Questo è consistente perché questi due stati (o con $E < 0$ o con $E > 0$) sono pari e senza nodi, rappresentano ambedue lo stato fondamentale del sistema e non possono esserci contemporaneamente.

Questa situazione ci pone il problema di capire cosa succede se esattamente

$$\frac{\hbar^2}{mg} = \frac{a}{2}. \tag{27}$$

È facile vedere il limite di $a \to \frac{2\hbar^2}{mg}+$ cioè $\kappa \to 0$, mentre il limite di $\frac{\hbar^2}{mg} \to \frac{a}{2}+$ $(k \to 0)$ è più delicato (perché singolare).

È più facile studiare direttamente il caso $\frac{\hbar^2}{mg} = \frac{a}{2}$. In questo caso, la funzione lineare

$$\psi(x) = \begin{cases} -x + \frac{a}{2} & \text{se} \quad 0 < x < \frac{a}{2}, \\ x + \frac{a}{2} & \text{per} \quad -\frac{a}{2} < x < 0, \end{cases} \tag{28}$$

ovviamente è pari e risolve l'equazione di Schrödinger con $E = 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = 0, \qquad x > 0, \quad x < 0, \tag{29}$$

soddisfa alla condizione al contorno a $x = \pm\frac{a}{2}$, e infine soddisfa anche la condizione di discontinuità di ψ' a $x = 0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-1-1) - g\frac{a}{2} = 0, \tag{30}$$

grazie alla (27).

Infatti, la soluzione (28) si ottine correttamente come limite, sia della (14) che della (22). Vedi Fig. 5.

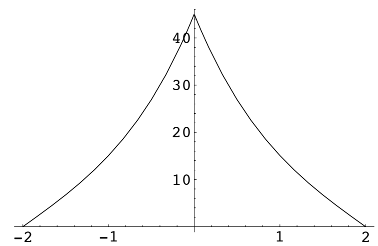

Figura 3: Lo stato fondamentale ha energia negativa se $a > \frac{2\hbar^2}{mg}$.

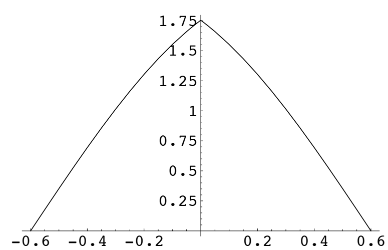

Figura 4: Lo stato fondamentale ha energia positiva se $a < \frac{2\hbar^2}{mg}$.

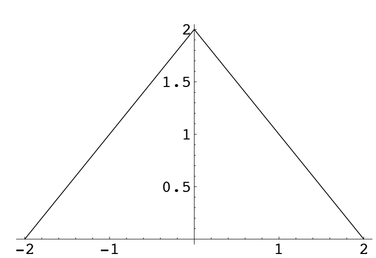

Figura 5: Lo stato fondamentale ha energia zero se $a = \frac{2\hbar^2}{mg}$. La funzione d'onda è lineare.