Compitino 1 di Meccanica Quantistica I (A)

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
12 novembre '08 (A.A. 08/09)

(Tempo a disposizione: 3 ore)

Problema 1.

Un sistema a tre stati è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = E_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si considerino due osservabili rappresentati dagli operatori,

$$A = a \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \frac{b}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

(i) Trovare gli autovalori e i relativi autostati (normalizzati) di H, di A, e di B.[1]

(*3 punti*)

(ii) Supponiamo che, a $t = 0$, la misura della variabile A abbia dato il risultato, $-a$. Dire quali sarebbero i risultati possibili e con quali probabilità rispettive, se si facesse una misura di B all'istante t. Ponete $\alpha \equiv \frac{E_0 t}{\hbar}$ per non riempire il foglio di simboli.

(*3 punti*)

(iii) All'istante $t_{+\varepsilon}$ si misura A. Calcolare la probabilità di trovare come risultato il valore massimo possibile per A, nei tre casi diversi:

1. Se la misura di B non è stata fatta a t;
2. Se la misura di B è stata fatta e si sa che il risultato era b_{minimo}, dove b_{minimo} è l'autovalore minimo di B.
3. Se la misura di B è stata fatta ma non si conosce il risultato;

(*3 punti*)

Problema 2.

Una particella di massa m si muove in una buca uni-dimensionale,

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < -a, \quad x > 2a \\ g\,\delta(x)\,. & -a \le x \le 2a \end{cases} \tag{1}$$

($g > 0$). Si vuole studiare i primi due livelli energetici. Siano $\psi_-(x)$ e $\psi_+(x)$ le funzioni d'onda per x negativo e positivo, rispettivamente. Imponendo la condizione di annullamento della funzione d'onda a $x = -a$ e $x = 2a$ e usando la forma dell'equazione di Schrödinger nelle due regioni $-a < x < 0$ e $0 < x < 2a$, possiamo porre

$$\psi_-(x) = A \sin k(x+a), \quad \psi_+(x) = B \sin k(x-2a), \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

[1] Fate questo punto con grande cura e attenzione, perché si utilizzano questi risultati nelle altre domande (ii) e (iii).

(i) Scrivere le relazioni su (A,B,k) che seguono dalle condizioni di (dis-)continuità a $x=0$.

(*3 punti*)

(ii) Dimostrare che tali relazioni ammettono una serie di soluzioni per le quali

$$\psi(0)=0,$$

e determinare l'energia minima fra questo gruppo di livelli.

(*3 punti*)

(iii) Un altro gruppo di soluzioni esistono, per le quali $\psi(0)\neq 0$. Facendo uso dei grafici, dimostrare che lo stato fondamentale del nostro sistema (1) appartiene a questo secondo gruppo, e determinare la sua energia, nei due limiti, $g\to 0$ e $g\to\infty$.

(*3 punti*)

Soluzione

Problema 1.

(i)

$$|E=E_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |1\rangle, \quad |E=-E_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |2\rangle, \quad |E=0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |3\rangle\,;$$

mentre gli autovettori di A sono

$$|a,1\rangle^{(A)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + i|2\rangle),$$

$$|-a\rangle^{(A)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - i|2\rangle),$$

$$|a,2\rangle^{(A)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |3\rangle,$$

e gli autovettori di B sono

$$|b\rangle^{(B)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(|1\rangle + \sqrt{2}|2\rangle + |3\rangle), \tag{2}$$

$$|-b\rangle^{(B)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(|1\rangle - \sqrt{2}|2\rangle + |3\rangle), \tag{3}$$

$$|0\rangle^{(B)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |3\rangle), \tag{4}$$

(ii) Lo stato a $t=0$ è dunque

$$\psi(0) = |-a\rangle^{(A)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - i|2\rangle).$$

Al tempo t lo stato allora è

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_0t/\hbar}\,|1\rangle - i\,e^{iE_0t/\hbar}\,|2\rangle\right). \tag{5}$$

Le probabilità per trovare $B = b, -b, 0$ sono, rispettivamente ($\alpha \equiv \frac{E_0 t}{\hbar}$)

$$P_b = \frac{1}{8}|e^{-i\alpha} - \sqrt{2}i\,e^{i\alpha}|^2 = \frac{1}{8}(3 + 2\sqrt{2}\sin 2\alpha) \tag{6}$$

$$P_{-b} = \frac{1}{8}|e^{-i\alpha} + \sqrt{2}i\,e^{i\alpha}|^2 = \frac{1}{8}(3 - 2\sqrt{2}\sin 2\alpha) \tag{7}$$

$$P_0 = \frac{1}{4}. \tag{8}$$

(iii) 1. Se la misura di B non è stata fatta a t, lo stato è (5); la probabilità richieta è:

$$\frac{1}{4}\left|\left(\langle 1| - i\langle 2|\right)\left(e^{-i\alpha}|1\rangle - ie^{i\alpha}|2\rangle\right)\right|^2 = \sin^2\alpha.$$

2. Se la misura di B è stata fatta e si sa che il risultato era b_{minimo}, dove b_{minimo} è l'autovalore minimo di B. In questo caso lo stato è $|-b\rangle^{(B)}$. La probabilità di trovare il risultato $A = a$ si ottiene sommando la probabilità di trovare lo stato $|a,1\rangle^{(A)}$ e lo stato $|a,2\rangle^{(A)}$:

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 |1+\sqrt{2}i|^2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}.$$

3. Se la misura di B è stata fatta ma non si conosce il risultato, bisogna sommare con appropriato probabilità-peso i casi in cui il risultato era b, $-b$ e 0. In ciascun caso, va calcolata la somma delle probabilità di trovare lo stato $|a,1\rangle^{(A)}$ e lo stato $|a,2\rangle^{(A)}$:

$$P_{A=a} = \frac{1}{8}(3+2\sqrt{2}\sin 2\alpha)\cdot\frac{5}{8} + \frac{1}{8}(3-2\sqrt{2}\sin 2\alpha)\cdot\frac{5}{8} + \frac{1}{4}\frac{3}{4} = \frac{21}{32}.$$

Problema 2.

(i) Dalle condizioni

$$\psi_-(0) = \psi_+(0); \qquad \psi'_+(0) - \psi'_-(0) = \frac{2mg}{\hbar^2}\psi(0),$$

seguono due relazioni

$$A\sin ka = -B\sin 2ka; \tag{9}$$

e

$$k\,(B\cos 2ka - A\cos ka) = \frac{2mg}{\hbar^2}A\sin ka. \tag{10}$$

Si deve risolvere il sistema, (9) e (10).

(ii) Dalla prima equazione si ha

$$\sin ka\,(A + 2B\cos ka) = 0. \tag{11}$$

Questo ha soluzioni

$$\sin ka = 0 \tag{12}$$

$$k = \frac{\pi n}{a}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Sostituendo la (12) nella seconda relazione (10), si trova

$$B\cos 2\pi n - A\cos \pi n = 0,$$

cioè,

$$B = (-1)^n A.$$

Per queste soluzioni,

$$\psi(0) = \sin ka = 0.$$

Il livello più basso tra questo gruppo di stati è

$$k = \frac{\pi}{a}, \tag{13}$$

i.e.,

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}.$$

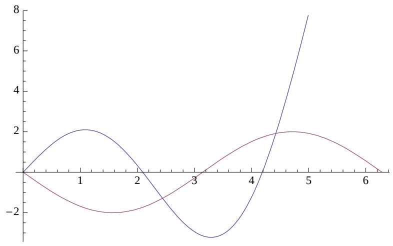

Figura 1:

(iii) Un'altra possibilità che segue dalla (11) è che

$$A + 2B \cos ka = 0. \qquad A = -2B \cos ka.$$

Sostituendo quest'ultimo nella seconda relazione (10) si ha

$$\cos 2ka + 2\cos^2 ka = -2\frac{2mg}{k\hbar^2} \sin ka \cos ka.$$

Ponendo

$$\xi = 2ka$$

si ha

$$\xi(2\cos\xi + 1) = -\frac{4mga}{\hbar^2} \sin\xi.$$

Considerando i due grafici,

$$y = \xi(2\cos\xi + 1), \qquad y = -\frac{4mga}{\hbar^2} \sin\xi,$$

(vedi Fig. 1) si vede facilmente che ci sono una serie infinita di soluzioni; la prima soluzione sta nell'intervallo,

$$\frac{2\pi}{3} < \xi < \pi,$$

i.e.,

$$\frac{\pi}{3a} < k < \frac{\pi}{2a}.$$

Paragonando con l'eq. (13), vediamo che lo stato fondamentale è priprio questo stato, i.e., lo stato più basso del secondo gruppo.

Nei limiti, $g \to 0$, e $g \to \infty$, l'intersezione tende a $\xi = \frac{2\pi}{3}$ e $\xi = \pi$. L'energia dell stato fondamentale si avvicina ai valori

$$E_0 \to \frac{\pi^2\hbar^2}{18ma^2}, \qquad \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2},$$

La funzione d'onda dello stato fondamentale è illustrata in Fig. 2.

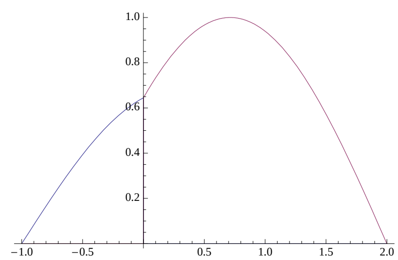

Figura 2: