Compitino 1 di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
15 dicembre 2010 (A.A. 10/11)

(Tempo a disposizione: 3 ore)

Problema 1.

Un sistema a due stati è caratterizzato dall'Hamiltoniana,

$$H = \begin{pmatrix} E_0 - \varepsilon & 0 \\ 0 & E_0 + \varepsilon \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon > 0 \tag{1}$$

Si vuole misurare una variabile rappresentata dall'operatore

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -if \\ if & 0 \end{pmatrix} \qquad f > 0\,. \tag{2}$$

(i) Determinare gli autovalori e gli autostati relativi di F.

(ii) Inizialmente il sisitema si trova nello stato fondamentale. Quali sono i risultati possibili di una misura di F e relative probabilità?

(iii) Supponiamo che la misura di F di cui al punto (ii) eseguito all'istante $t = 0$ abbia dato l'autovalore *massimo* di F come risultato. Qual'è la probabilità $P(t)$ che una seconda misura di F fatta all'istante $t(> 0)$ dia il valore *minimo* di F? Fare uno schizzo di $P(t)$.

(*N.B.* questo è analogo del fenomeno dell'*oscillazione* dei neutrini, dei mesoni kappa neutri, etc.)

Problema 2.

Una particella si muove in un potenziale delta unidimensionale:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \lambda\delta(x), \qquad \lambda > 0. \tag{3}$$

La condizione di (dis-)continuità atttraverso $x = 0$è data da,

$$\psi'(0+) - \psi'(0-) = -\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\psi(0), \tag{4}$$

dove $\psi'(0\pm)$ indicano i valori della derivata prima della funzione d'onda nei limiti $x \to 0$ da $x > 0$ e da $x < 0$ rispettivamente.

(i) Dimostrare che la (4) è compatibile con la continuità della densità di corrente.

(ii) Utilizzando la (4) trovare l'energia e la funzione d'onda dello stato legato.

(iii) Supponiamo che la particella è inizialmente legata al potenziale. All'istante $t = 0$ la costante λ si dimezza all'improvviso. Determinare la probabilità che la particella si liberi dal legame. (Suggerimento: calcolare prima la probabililtà che la particella resti legata.)

Problema 3.

Il teorema di Feynman-Hellman dice che la dipendenza degli autovalori di energia $E_n(g)$ dal parametro g nel potenziale

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x;g) \,, \tag{5}$$

è data da

$$\frac{dE_n(g)}{dg} = \langle n|\frac{\partial V}{\partial g}|n\rangle \,. \tag{6}$$

(i) Dimostrare il teorema.

(ii) Calcolare tale variazione $\frac{dE_n(g)}{dg}$ nel caso di un oscillatore lineare:

$$g = \omega, \qquad V(x;\omega) = \frac{m\omega^2}{2}x^2 \tag{7}$$

e discutere il risultato.

Problema 4 (opzionale)

Si consideri un oscillatore armonico bidimensionale di massa m

$$H = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + 4y^2) \,. \tag{8}$$

(i) Determinare lo spettro dell'energia e discutere la degenerazione dei livelli.

(ii) A $t = 0$ il sistema è descritto da un pacchetto d'onda $\psi_0(\mathbf{r})$. Esistono i valori di t (> 0), tali che la probabilità di trovare la particella nell'intorno di $\mathbf{r}$, $P(\mathbf{r},t)d\mathbf{r}$, sia uguale a quella iniziale, $P(\mathbf{r},0)d\mathbf{r}$? Se sì, quali?

Formulario: oscillatore armonico unidimensionale

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \,, \qquad \psi_n(x) = C_n H_n(\alpha x)\, e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} = C_n H_n(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x)\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \,,$$

$$C_n = \left(\frac{\alpha}{\pi^{1/2}2^n n!}\right)^{1/2} = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}\left(\frac{1}{2^n n!}\right)^{1/2}; \quad \alpha \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \,;$$

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, \qquad H_1(x) = 2x, \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2, \qquad H_3(x) = 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12, \qquad \ldots \qquad \ldots . \end{aligned}$$

$$E_n = \omega\hbar(n + \frac{1}{2}) \,;$$

$$x_{nm} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{n+1}{2}}, & m = n+1, \\ \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{n}{2}}, & m = n-1, \\ 0 & \text{altrimenti}; \end{cases} \qquad (x^2)_{nm} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^2}\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{4}}, & m = n+2, \\ \frac{1}{\alpha^2}\sqrt{\frac{n(n-1)}{4}}, & m = n-2, \\ \frac{1}{\alpha^2}\frac{2n+1}{2}, & m = n, \\ 0 & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

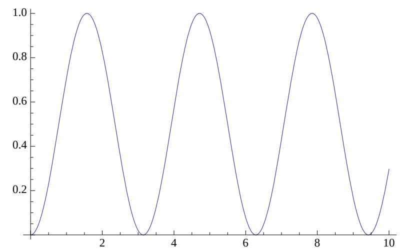

Figura 1:

Soluzione

Problema 1.

(i) Gli autovalori sono $F = f$ e $F = -f$ con relativi autovettori

$$|F, f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}; \qquad |F, -f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}; \tag{9}$$

(ii) Lo stato in cui si trova il sistema è

$$|\psi_0\rangle = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, \tag{10}$$

le probabilità di trovare i due valori possibili di F sono

$$|\langle F, f|\psi_0\rangle|^2 = \frac{1}{2}, \qquad |\langle F, -f|\psi_0\rangle|^2 = \frac{1}{2}\ . \tag{11}$$

(iii) Dopo la misura di F lo stato in cui si trova il sistema è

$$|\psi(0)\rangle = |F, f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}. \tag{12}$$

Esso evolve nel tempo come

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{i\varepsilon t/\hbar}\\ ie^{-i\varepsilon t/\hbar}\end{pmatrix}. \tag{13}$$

All'istante t le probabilità di trovare $F = \pm f$ sono allora

$$P_f = \left|\frac{1}{2}(1, -i)\begin{pmatrix}e^{i\varepsilon t/\hbar}\\ ie^{-i\varepsilon t/\hbar}\end{pmatrix}\right|^2 = \cos^2 \varepsilon t/\hbar \tag{14}$$

$$P_{-f} = \left|\frac{1}{2}(1, i)\begin{pmatrix}e^{i\varepsilon t/\hbar}\\ ie^{-i\varepsilon t/\hbar}\end{pmatrix}\right|^2 = \sin^2 \varepsilon t/\hbar \tag{15}$$

Problema 2.

$$\psi = \sqrt{\kappa} e^{-\kappa |x|}, \qquad \kappa = \frac{m\lambda}{\hbar^2}. \tag{16}$$

Dopo il dimezzamento della costante, la funzione d'onda resta quella di prima, mentre la funzione d'onda dello stato legato del nuovo sistema è:

$$\psi' = \sqrt{\frac{\kappa}{2}} e^{-\kappa |x|/2} \, . \tag{17}$$

La probabilità che la particella resta legata al potenziale dopo il cambiamento della costante di accoppiamento del potenziale è

$$P = |\langle \psi' | \psi \rangle|^2 = \frac{8}{9} \, . \tag{18}$$

La probabilità richiesta è

$$1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9} \, . \tag{19}$$

Problema 3.

$$\begin{aligned} \frac{dE_n(g)}{dg} &= \frac{d}{dg} \int dx \, \psi_n^*(x;g) H(x,p;g) \psi_n(x;g) = \langle n | \frac{\partial V}{\partial g} | n \rangle + \int dx \, \psi_n^*(x;g) H(x,p;g) \frac{\partial}{\partial g} \psi_n(x;g) + \\ &+ \int dx \left(\frac{\partial}{\partial g} \psi_n^*(x;g) \right) H(x,p;g) \psi_n(x;g) = \langle n | \frac{\partial V}{\partial g} | n \rangle + E_n \frac{\partial}{\partial g} \langle n | n \rangle = \langle n | \frac{\partial V}{\partial g} | n \rangle \, . \end{aligned} \tag{20}$$

Usando il teorema e usando l'elemento di matrice di x^2, si ha

$$\frac{dE_n(\omega)}{d\omega} = \hbar (n + \frac{1}{2}). \tag{21}$$

Discussione

Questo risultato che segue dal teorema è consistente con il noto risultato $E_n(\omega) = \omega \hbar (n + \frac{1}{2})$.

La (21) è un risultato esatto. Integrando in ω si ha

$$E_n(\omega) = \omega \hbar (n + \frac{1}{2}) + C \, , \tag{22}$$

doce C è una costante. Considerando il limite $\omega \to 0$, quando il sistema tende ad una particella libera, con lo spettro $E \geq 0$, i.e., con lo stato fondamentale $E_0 = 0$, la consistenza richiede che

$$C = 0, \tag{23}$$

perciò

$$E_n(\omega) = \omega \hbar (n + \frac{1}{2}) \, . \tag{24}$$

Un altro modo per interpretare il risultato (21) è considerare un processo adiabatico in cui il vlaore di ω è variato col tempo sufficientemente lentamente, di modo che il sistema che è all'n-simo stato stazionario inizialmente resta all'n-simo stato istantaneo (i.e., n-simo autostato di $H(x,p;\omega(t))$.) (Teorema adiabtico). Integrando la (21) da ω_1 a ω_2 si ha allora

$$\Delta E_n = (\omega_2 - \omega_1)(n + \frac{1}{2}) \, , \tag{25}$$

che è di nuovo in accordo con il risultato esatto.

Problema 4.

$$E_{n,m} = \omega\hbar(n+2m+\frac{3}{2}) , \qquad n,m = 0,1,2,\ldots . \tag{26}$$

Si ha una degenerazione quando per (n,m) distinti la combinazione $n+2m$ prende lo stesso valore. Visto che n prende tutti i possibili numeri naturali, dato il livello $N = n+2m$ $(N = 0,1,2,\ldots)$ basta trovare quali possibili valori m prende.

(i) Per N pari,

$$m = 0,1,\ldots\frac{N}{2}, \tag{27}$$

perciò il grado di degenerazione è $g = \frac{N}{2}+1$.

(ii) Per N dispari,

$$m = 0,1,\ldots\frac{N-1}{2}, \tag{28}$$

perciò $g = \frac{N+1}{2}$.

Dunque il grado di degenerazione è dato da

$$g = \left[\frac{N+2}{2}\right] \tag{29}$$

(parte intero di $\frac{N+2}{2}$.)

Un pacchetto d'onda evolve nel tempo come

$$\psi(\mathbf{r},t) = e^{-i\omega t}\sum_{n,m} c_{n,m}\, e^{-i\omega(n+2m)t}\psi_{n,m}(\mathbf{r}) . \tag{30}$$

Per un pacchetto generico (che non ha nessuna proprietà di simmetrie), $|\psi(\mathbf{r})|^2$ ritorna alla distribuzione originale dopo il periodo classico,

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega} , \tag{31}$$

o dopo un multiplo intero di t_0, $N\,t_0$, $N = 1,2,3,\ldots$.

Tra i casi particolari, un pacchetto d'onda pari in x, $\psi(x,y,0) = \psi(-x,y,0)$ contiene soltanto i componenti con n pari nello sviluppo (30), per cui la distribuzione ritorna a quella originale dopo metà priodo,

$$t_0 = \frac{\pi}{\omega} . \tag{32}$$

Se per caso il pacchetto iniziale corrisponde ad uno stato stazionario, naturalmente la distribuzione $|\psi(\mathbf{r})|^2$ è indipendente dal tempo.

Naturalmente si possono considerare i pacchetti d'onda particolari tali che $c_{n,m} \neq 0$ solo per multipli di un intero p, i.e.,

$$n+2m = p,2p,3p,\ldots, \tag{33}$$

allora tale pacchetto ha una periodicità ridotta

$$t_0 = \frac{2\pi}{p\omega} . \tag{34}$$