

## Compitino 2 di Meccanica Quantistica I (A)

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,  
18 dicembre '08 (A.A. 08/09)

(Tempo a disposizione: 3 ore )

### Problema 1.

Un atomo di idrogeno si trova in uno stato di  $n = 2$  (lo stato fondamentale corrisponde a  $n = 1$ ).

- (i) Dire qual'è il grado di degenerazione del livello  $n = 2$ , tenendo conto dello spin dell'elettrone. Dire quali sono i valori possibili di  $\ell$  e di  $j$ , dove <sup>1</sup>

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{s},$$

dove  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{s}$  sono gli operatori (adimensionali) del momento angolare orbitale e dello spin dell'elettrone, rispettivamente.  $\mathbf{J}$  è il momento angolare totale.

- (ii) Tenendo conto delle interazioni spin-orbita, l'Hamiltoniana ha la forma,

$$H = H_0 + \frac{e^2 \hbar^2}{2m^2 c^2} \frac{1}{r^3} \mathbf{s} \cdot \mathbf{L}, \quad H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r}.$$

Dire quali degli operatori  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{L}^2$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{s}^2$ ,  $\mathbf{J}$ , e  $\mathbf{J}^2$  commutano con l'Hamiltoniana  $H$ .

- (iii) Se il termine delle interazioni spin-orbita è piccolo rispetto al termine Coulombiano, possiamo in una prima approssimazione trascurare gli stati con  $n \neq 2$ , e usare gli autostati ( $n = 2$ ) di  $H_0$ ,

$$|2, \ell, m; \uparrow\rangle, \quad |2, \ell, m; \downarrow\rangle, \quad m = \ell, \ell - 1, \dots, -\ell,$$

come stati di base per trovare gli autostati di  $H$ . Trovare in questo modo gli autostati di  $H$ , relativi numeri quantici e rispettivi autovalori. In quanti sottolivelli si divide il livello  $n = 2$ , e con quale degenerazione per ciascun sottolivello? Esprimere i risultati sull'energia in termini di  $e^2/r_B$  e di  $\alpha = e^2/\hbar c$ , e discutere l'ordine di grandezza degli spostamenti dovuti al termine spin-orbita, rispetto all'energia del livello di Bohr.

- (iv) Spiegare perché il calcolo del punto (iii) non è esatto.

### Problema 2.

Un nucleo A di spin-parità  $J^P = (\frac{5}{2})^-$  decade, a riposo, in due nuclei, B di spin-parità  $(\frac{1}{2})^+$ , e C di spin-parità  $0^-$ . Sono conservati sia il momento angolare e la parità nel processo.

- (i) Trovare il momento angolare orbitale del moto relativo nello stato finale.

- (ii) Sapendo che il nucleo A era originalmente nello stato

$$(J, J_z) = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}),$$

determinare la distribuzione angolare della particella C.

- (iii) Si misura la componente  $s_z$  dello spin della particella B, con un apparecchio à la Stern-Gerlach posto nella direzione  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$  (i.e.,  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\phi = 0$ ). (Fig. 1.) Trovare la probabilità che il risultato sia  $s_z = +\frac{1}{2}$ .

<sup>1</sup>Gli autovalori di  $\mathbf{L}^2$  sono  $\ell(\ell+1)$ ; gli autovalori di  $\mathbf{J}^2$  sono  $j(j+1)$ .

Go To Next Page

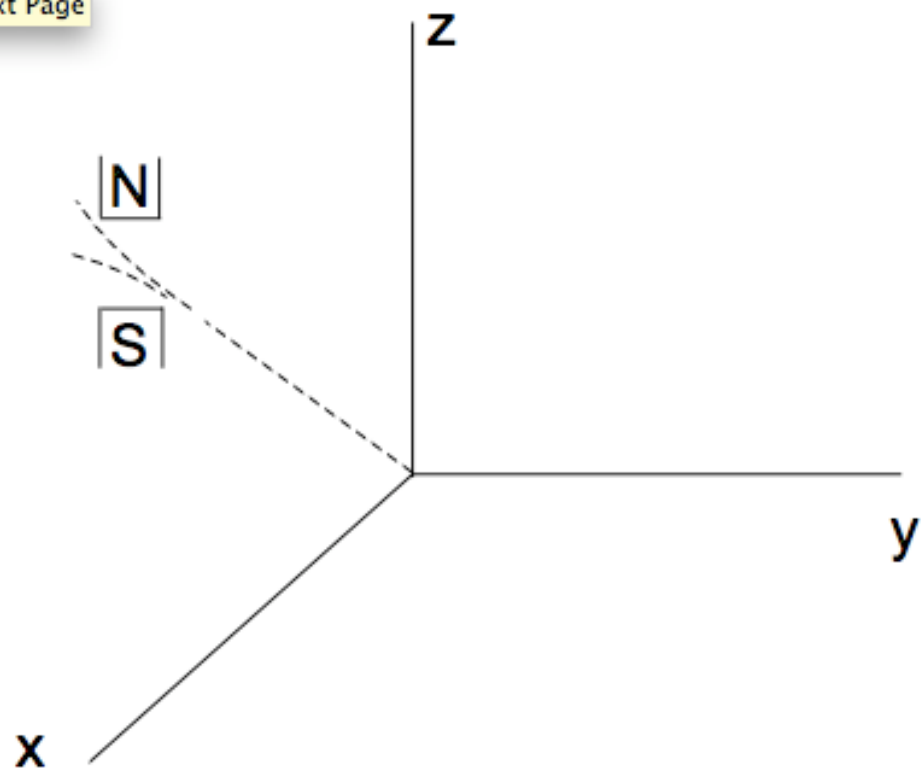


Figura 1:

## Soluzione

### Problema 1.

(i)  $\ell = 0, 1$ , e perciò  $j = \frac{1}{2}$  o  $j = \frac{3}{2}$ .

(ii)  $1/r^3$  commuta sia con  $\mathbf{L}$  che con  $\mathbf{s}$ . D'altronde  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{L}$  può essere riscritto come

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{s}^2). \quad (1)$$

Si vede allora che questo commuta con l'operatore del momento angolare totale  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{s}$ : questo è semplice conseguenza del fatto che per ogni operatore di momento angolare il suo quadrato commuta con ciascun componente.  $H$  dunque commuta con  $J_i$  e, naturalmente, con  $\mathbf{J}^2$ .  $H$  commuta inoltre con  $\mathbf{L}^2$  e con  $\mathbf{s}^2$  ma non commuta né con  $\mathbf{L}$  né con  $\mathbf{s}$ .

(iii) Il livello  $n = 2$  dell'Hamiltoniana  $H_0$  è otto volte degenere, con autostati,

$$|2, \ell, m; \uparrow\rangle, \quad |2, \ell, m; \downarrow\rangle, \quad m = \ell, \ell - 1, \dots, -\ell;$$

qualsiasi combinazioni lineari di questi stati sono ancora autostato di  $H_0$ . Da quanto si è detto al punto (ii), per trovare gli autostati dell'Hamiltoniana totale, è sufficiente diagonalizzare il termine di spin-orbita in questo sottospazio: essi sono autostati di  $\mathbf{J}^2$ , i.e.,

$$\begin{aligned} |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle &= |2, 1, 1; \uparrow\rangle; \\ |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}|2, 1, 1; \downarrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|2, 1, 0; \uparrow\rangle; \\ |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|2, 1, 0; \downarrow\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|2, 1, -1; \uparrow\rangle; \\ |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle &= |2, 1, -1; \downarrow\rangle; \\ |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle^{(1)} &= \sqrt{\frac{2}{3}}|2, 1, 1; \downarrow\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|2, 1, 0; \uparrow\rangle; \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle^{(1)} &= \sqrt{\frac{1}{3}}|2, 1, 0; \downarrow\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|2, 1, -1; \uparrow\rangle; \\ |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle^{(2)} &= |2, 0, 0; \uparrow\rangle; \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle^{(2)} &= |2, 0, 0; \downarrow\rangle; \end{aligned}$$

Per calcolare l'energia di ciascun sottolivello, vista la degenerazione dovuta alle direzioni del momento angolare totale, basta calcolarla per lo stato di  $J_z$  massimo, per i tre multipletti di  $J$ :

$$\Delta E^{J=3/2} = \langle \frac{3}{2}, \frac{3}{2} | \left( \frac{e^2 \hbar^2}{2m^2 c^2} \frac{1}{r^3} \mathbf{s} \cdot \mathbf{L} \right) | \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle = \frac{e^2 \hbar^2}{4m^2 c^2} \langle 2, 1, 1 | \frac{1}{r^3} | 2, 1, 1 \rangle$$

dove abbiamo usato la (1). L'elemento di matrice di  $\frac{1}{r^3}$  si calcola facilmente:

$$\langle 2, 1, 1 | \frac{1}{r^3} | 2, 1, 1 \rangle = \int_0^\infty dr r^2 R_{2,1}^2(r) \frac{1}{r^3} = \frac{1}{24} \int_0^\infty dr r e^{-r} = \frac{1}{24 r_B^3},$$

dove alla fine del calcolo abbiamo ripristinato il raggio di Bohr. Perciò

$$\Delta E^{J=3/2} = \frac{e^2 \hbar^2}{96 m^2 c^2 r_B^3} = \frac{e^2}{96 r_B} \frac{e^4}{\hbar^2 c^2} = \frac{e^2}{96 r_B} \alpha^2.$$

Questo livello è 4 volte degenere. Per lo stato di  $J = \frac{1}{2}$  con  $\ell = 1$ ,

$$\Delta E_1^{J=1/2} = {}^{(1)}\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \left( \frac{e^2 \hbar^2}{2m^2 c^2} \frac{1}{r^3} \mathbf{s} \cdot \mathbf{L} \right) | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle^{(1)} = -\frac{e^2 \hbar^2}{2m^2 c^2} \langle 2, 1 | \frac{1}{r^3} | 2, 1 \rangle = -\frac{e^2}{48 r_B} \alpha^2,$$

che è 2 volte degenere. Negli 2 stati di onda S ( $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle^{(2)}$ ) le interazioni spin-orbita si annullano e

$$\Delta E_2^{J=1/2} = 0$$

Ricapitolando, il livello  $n = 2$  si divide in tre sottolivelli (Fig. 2) con lo splitting dell'ordine di

$$O(\alpha^2) \sim 10^{-5},$$

relativamente all'energia di Bohr,  $-\frac{e^2}{8r_B}$ .

- (iv) Il calcolo non è esatto perché sono stati trascurati gli stati di  $n \neq 2$ , nella diagonalizzazione dell'Hamiltoniana. L'effetto di elementi non diagonali in  $n$ ,  $O(\epsilon)$ , con termini diagonali dell'ordine di  $O(\frac{e^2}{r_B})$  si può studiare, considerando una matrice del tipo,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} E_1 & \epsilon \\ \epsilon & E_2 \end{pmatrix},$$

dove  $E_1$  e  $E_2$  rappresentano le energie di due orbite  $n_1$  e  $n_2$  ( $n_1 \neq n_2$ ). La diagonalizzazione di questa matrice dà:

$$\lambda \simeq E_{1,2} \pm \frac{\epsilon^2}{E_1 - E_2}.$$

L'elemento non diagonale  $\epsilon$  può essere considerato come una quantità dello stesso ordine di grandezza dello splitting calcolato nel punto (iii):

$$\epsilon \sim O\left(\frac{e^2}{r_B} \alpha^2\right).$$

Perciò le correzioni dovute a tali effetti (mixing tra gli stati non degeneri, i.e., di  $n$  diversi) sono dell'ordine di

$$\left(\frac{e^2}{r_B} \alpha^2\right)^2 / \left(\frac{e^2}{r_B}\right)^2 \sim \alpha^4,$$

i.e., formalmente  $O(\alpha^2)$  rispetto alle correzioni tenute conto nel calcolo al punto (iii).

Nella teoria delle perturbazioni, il calcolo fatto qui al punto (iii) non è altro che la usuale procedura all'ordine più basso, nella teoria delle perturbazioni degenere.

## Problema 2.

- (i) Lo spin totale nello stato finale è  $S = \frac{1}{2}$ . Per formare il momento angolare totale uguale a  $\frac{5}{2}$  i valori possibili per  $\ell$  sono  $\ell = 2$  o  $\ell = 3$ . Tenendo conto della conservazione della parità, l'unico valore possibile è

$$\ell = 2.$$

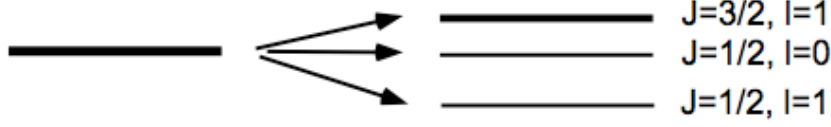


Figura 2:

- (ii) Utilizzando la tabella dei coefficienti di Clebsch-Gordan, la funzione d'onda (angolare-spin) risulta essere:

$$\Phi = \sqrt{\frac{1}{5}} Y_{2,2}(\theta, \phi) |\downarrow\rangle + \sqrt{\frac{4}{5}} Y_{2,1}(\theta, \phi) |\uparrow\rangle.$$

La distribuzione angolare della particella C (o di B— la distribuzione è identica, perché la funzione d'onda del moto relativa è pari per  $\mathbf{r} \leftrightarrow -\mathbf{r}$ ) è dunque data da:

$$\begin{aligned} d\Omega |\Phi|^2 &= d\Omega \left( \frac{1}{5} |Y_{2,2}(\theta, \phi)|^2 + \frac{4}{5} |Y_{2,1}(\theta, \phi)|^2 \right) \\ &= d\phi d\theta \sin\theta \frac{3}{32\pi} (\sin^4\theta + 16 \sin^2\theta \cos^2\theta). \end{aligned} \quad (2)$$

È facile verificare che

$$\int d\phi d\theta \sin\theta \frac{3}{32\pi} (\sin^4\theta + 16 \sin^2\theta \cos^2\theta) = 1 :$$

la distribuzione è correttamente normalizzata.

- (iii) Nella direzione  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\phi = 0$  la funzione d'onda è:

$$\Phi = \sqrt{\frac{1}{5}} Y_{2,2}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) |\downarrow\rangle + \sqrt{\frac{4}{5}} Y_{2,1}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) |\uparrow\rangle = \sqrt{\frac{1}{5}} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{1}{2} |\downarrow\rangle - \sqrt{\frac{4}{5}} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{1}{2} |\uparrow\rangle.$$

Considerata come *funzione d'onda di spin*, questa è semplicemente (normalizzando)

$$\frac{1}{\sqrt{17}} (|\downarrow\rangle - 4|\uparrow\rangle).$$

La probabilità richiesta è perciò

$$P_{\uparrow} = \frac{16}{17} \simeq 0.94118.$$