

Compitino 2 di Meccanica Quantistica I (A)

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,

18 dicembre '09 (A.A. 09/10)

(Tempo a disposizione: 3 ore)

Problema 1

Due particelle di spin $\frac{1}{2}$ interagiscono con l'Hamiltoniana,

$$H_0 = 4f \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2, \quad f > 0, .$$

- (i) Dire quali sono le variabili conservate. Determinare gli autovalori dell'energia e gli autostati relativi (in termini di stati dei due spin). (3 punti)
- (ii) Si accende un campo esterno $\mathbf{C} = (0, 0, C)$. Solo la prima particella interagisce con il campo esterno, con il potenziale,

$$V = 2C \cdot \mathbf{s}_1 .$$

Trovare le osservabili conservate e determinare lo spettro del sistema descritto da $H = H_0 + V$. (3 punti)

- (iii) Il sistema è nello stato fondamentale di $H = H_0 + V$. Sapendo che la misura di s_{1z} ha dato il risultato $s_{1z} = +\frac{1}{2}$, determinare la probabilità che una contemporanea misura di s_{2z} dia il risultato $+\frac{1}{2}$. (2 punti)

Problema 2

N.B. Risolvere il problema esattamente, senza usare la teoria delle perturbazioni.

Una particella di massa m e di carica q è legato ad un centro di forza armonica. Il sistema è inoltre sottoposto ad un campo magnetico debole esterno, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. L'Hamiltoniana è

$$H = \frac{(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{r}^2 ;$$

il potenziale vettoriale può essere preso come

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{By}{2}, \frac{Bx}{2}, 0\right) .$$

- (i) Considerate prima il caso senza il campo esterno, e.g., $B = 0$. Determinare l'energia e relativa degenerazione *dei primi tre livelli* in ordine ascendente dell'energia, in questo caso. Dire quali valori del momento angolare orbitale L appaiono fra questi stati. (4 punti)
- (ii) Si consideri ora il caso $B \neq 0$. Tenendo conto soltanto dei termini del primo ordine in B , elencare tutte le osservabili che commutano con H . Determinare lo spettro (autovalori dell'energia e la degenerazione) per i livelli corrispondenti ¹ agli stati considerati al punto (i). (3 punti)
- (iii) (Opzionale) Discutere lo stesso problema tenendo conto anche dei termini $O(B^2)$. (1 punto)

¹Il fatto che B sia un campo debole significa che ogni livello calcolato *esattamente* comunque ha, nella sua vicinanza, il livello corrispondente (del sistema $B = 0$) cui tende nel limite $B \rightarrow 0$. Ripetiamo quindi che non si richiede di lavorare in un metodo approssimativo – la teoria delle perturbazioni.

Formulario

Armoniche sferiche

$$\begin{aligned} Y_{0,0} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\ Y_{1,0} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, & Y_{2,0} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), \\ Y_{1,\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}, & Y_{2,\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{\pm i\phi}, \\ & & Y_{2,\pm 2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}, \end{aligned}$$

Oscillatore unidimensionale

$$\psi_n(x) = C_n H_n(\alpha x) e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} = C_n H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2},$$

dove

$$C_n = \left(\frac{\alpha}{\pi^{1/2} 2^n n!} \right)^{1/2} = \left(\frac{m\omega}{\hbar \pi} \right)^{1/4} \left(\frac{1}{2^n n!} \right)^{1/2}; \quad \alpha \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}};$$

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, & H_1(x) &= 2x, \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2, & H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12, & \dots & \dots \end{aligned}$$

Operatori di spin per $s = 1/2$

$$s_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Soluzione

Problema 1.

(i) L'Hamiltoniana è riscritta come

$$H_0 = 2f(\mathbf{S}^2 - \mathbf{s}_1^2 - \mathbf{s}_2^2) = 2f(\mathbf{S}^2 - \frac{3}{2}),$$

dove $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ è lo spin totale. Le variabili conservate sono

$$\mathbf{S}^2, \quad S_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Visto che lo spin totale può prendere i valori $S = 0$ o $S = 1$, gli autovalori dell'energia sono

$$E = f, \quad (S = 1), \quad -3f, \quad (S = 0).$$

Gli autostati relativi dunque possono essere presi come autostati di (\mathbf{S}^2, S_z) :

$$\begin{aligned} |1\rangle &= |1, 1\rangle = |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle, & |2\rangle &= |1, -1\rangle = |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle, & |3\rangle &= |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle), \\ |4\rangle &= |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle). \end{aligned} \quad (1)$$

(ii) L'Hamiltoniana totale è

$$H = 2f(\mathbf{S}^2 - \frac{3}{2}) + 2Cs_{1z}.$$

L'osservabile conservata è soltanto

$$S_z.$$

Calcolando gli elementi di matrice di H nella base (1), si ha

$$\begin{pmatrix} f+C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f-C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & C \\ 0 & 0 & C & -3f \end{pmatrix}.$$

Diagonalizzandola si trovano gli autovalori dell'energia:

$$E_1 = f+C, \quad E_2 = f-C, \quad E_3 = -f + \sqrt{4f^2 + C^2}, \quad E_4 = -f - \sqrt{4f^2 + C^2}.$$

(iii) La funzione d'onda dello stato fondamentale (E_4) è una combinazione lineare di $|3\rangle$ e $|4\rangle$, i.e., una combinazione di $|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle$. Quindi non è necessario determinare la funzione d'onda esplicitamente per poter concludere che la probabilità richiesta è 0.

Problema 2.

(i) I livelli di un oscillatore tridimensionale isotropo è

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \omega\hbar(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2}).$$

Perciò i primi tre livelli sono

$$E_0 = \frac{3}{2}\omega\hbar, \quad E_1 = \frac{5}{2}\omega\hbar, \quad E_2 = \frac{7}{2}\omega\hbar$$

con relativa degenerazione

$$d_0 = 1, \quad d_1 = 3, \quad d_2 = 6,$$

e in generale,

$$d_N = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$$

i.e., il numero di insieme degli interi non negativi (n_1, n_2, n_3) tali che

$$n_1 + n_2 + n_3 = N.$$

Dalle funzioni d'onda relative si avvinche che l' N -simo livello contiene gli stati con il momento angolare orbitale L

$$L = N, \quad N-2, \quad \dots, 1(0),$$

con i valori della stessa parità. Perciò per i primi tre livelli i valori del momento angolare orbitale sono:

$$L = 0, \quad L = 1, \quad L = 2, 0$$

rispettivamente.

(ii)

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \left((p_x + \frac{qBy}{2c})^2 + (p_y - \frac{qBx}{2c})^2 + p_z^2 \right) + \frac{m\omega^2}{2} \mathbf{r}^2 \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \mathbf{r}^2 + \frac{qB}{2mc} (yp_x - xp_y) + \frac{q^2 B^2}{8mc^2} (x^2 + y^2) \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \mathbf{r}^2 - \frac{qB\hbar}{2mc} L_z + \frac{q^2 B^2}{8mc^2} (x^2 + y^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Trascurando i termini $O(B^2)$, le variabili conservate sono

$$\mathbf{L}^2, \quad L_z, \quad \mathcal{P}$$

Quindi gli autostati dell'oscillatore tridimensionale, presi come autostati di \mathbf{L}^2 , L_z sono autovalori dell'Hamiltoniana, con autovalori,

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{3}{2} \omega \hbar, \quad E_1^{L_z} = \frac{5}{2} \omega \hbar - \frac{qB\hbar}{2mc} L_z, \quad (L_z = 1, 0, -1); \\ E_2^{L_z} &= \frac{7}{2} \omega \hbar - \frac{qB\hbar}{2mc} L_z, \quad (L_z = 2, 1, 0, -1, -2). \end{aligned} \quad (3)$$

dove nell'ultimo gruppo di livelli, il livello corrispondente a $L_z = 0$ è doppiamente degenero ($L = 2, 0$).

(iii) Tenendo conto anche di termini $O(B^2)$, \mathbf{L}^2 non commuta più con H , tuttavia L_z continua ad essere un buon numero quantico. Il problema si risolve lo stesso esattamente, poiché prima risolvendo il problema

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \mathbf{r}^2 + \frac{q^2 B^2}{8mc^2} (x^2 + y^2).$$

si ha un oscillatore non isotropo, con i livelli,

$$\tilde{E}_{n_1, n_2, n_3} = \tilde{\omega} \hbar (n_1 + n_2 + 1) + \omega \hbar (n_3 + \frac{1}{2}), \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 + \frac{q^2 B^2}{4m^2 c^2}}.$$

Ora è facile trovare tutti i livelli esattamente.

1. Lo stato fondamentale ha $n_1 = n_2 = n_3 = 0$. Esso ha $L_z = 0$, per cui

$$\hat{E}_0 = \tilde{\omega}\hbar + \frac{1}{2}\omega\hbar.$$

2. I tre stati corrispondenti a $N = 1$ dell'oscillatore isotropo, sono divisi in

$$\hat{E}_1^{0,0,1} = \tilde{\omega}\hbar + \frac{3}{2}\omega\hbar,$$

(che non ha contribuito del termine $\propto B$ perché $L_z = 0$); i due stati degeneri $(n_1, n_2, n_3) = (1, 0, 0), (0, 1, 0)$ devono essere ricombinati come autostati di L_z , i.e.,

$$\Psi_{(1,0,0)} \pm i\Psi_{(0,1,0)} \propto \mp Y_{1,\pm};$$

questi ultimi sono autostati dell'energia, con

$$\begin{aligned}\hat{E}_1^{L_z=1} &= 2\tilde{\omega}\hbar + \frac{1}{2}\omega\hbar - \frac{qB\hbar}{2mc}; \\ \hat{E}_1^{L_z=-1} &= 2\tilde{\omega}\hbar + \frac{1}{2}\omega\hbar + \frac{qB\hbar}{2mc}.\end{aligned}$$

3. Il terzo livello dell'oscillatore isotropo corrisponde a

$$\begin{aligned}(n_1, n_2, n_3) &= (0, 0, 2), \quad (L_z = 0), \quad (1, 0, 1), (0, 1, 1), \quad (L_z = \pm 1), \\ &(2, 0, 0), (0, 2, 0), (1, 1, 0), \quad (L_z = \pm 2, 0)\end{aligned}\quad (4)$$

Gli autostati dell'energia sono le combinazioni di questi stati che sono autostati di L_z :

$$\Psi_{0,0,2}(L_z = 0); \quad \Psi_{1,0,1} \pm i\Psi_{0,1,1}(L_z = \pm 1);$$

$$\Psi_{2,0,0} + \Psi_{0,2,0}, (L_z = 0); \quad \Psi_{2,0,0} - \Psi_{0,2,0} \pm \sqrt{2}\Psi_{1,1,0}, (L_z = \pm 2);$$

con relativi valori di energia

$$\begin{aligned}\hat{E}_{0,0,2}^{L_z=0} &= \tilde{\omega}\hbar + \frac{5}{2}\omega\hbar; \\ \hat{E}_2^{L_z=\pm 1} &= 2\tilde{\omega}\hbar + \frac{3}{2}\omega\hbar \mp \frac{qB\hbar}{2mc}. \\ \hat{E}_2^{L_z=0} &= 3\tilde{\omega}\hbar + \frac{1}{2}\omega\hbar. \\ \hat{E}_2^{L_z=\pm 2} &= 3\tilde{\omega}\hbar + \frac{1}{2}\omega\hbar \mp \frac{qB\hbar}{mc}.\end{aligned}$$

La degenerazione trovata al punto (ii) è dunque eliminata.