Compitino 1 di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
7 ottobre 2005 (A.A. 05/06)

(Tempo a disposizione: 2.5 ore.)

Problema 1. Un oscillatore armonico descritto da

$$H_- = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2, \tag{1}$$

si trova nello stato fondamentale. All'istante $t = 0$, la costante di richiamo si riduce all'improvviso di fattore 4: l'Hamiltoniana a $t > 0$ è:

$$H_+ = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2, \qquad \omega = \frac{\omega_0}{2}. \tag{2}$$

Evidentemente, $\psi(x,0)$ è lo stato fondamentale di H_-. Si vuole studiare come evolve il sistema col tempo.

(i) Quale sarebbe la probabilità $P(x)\,dx$ di trovare la particella nell'intervallo $(x, x+dx)$, se la misura fosse fatta a $t = 0$?

(ii) Esistono gli istanti t ($t > 0$) in cui la distribuzione della probabilità $P(x)\,dx$ è identica a quella a $t = 0$? Quali?

(iii) Dire se il sistema è in un autostato dell'energia (*i.e.*, di H_+), dopo la riduzione della costante di richiamo. Se non lo è, determinare la probabilità che il sistema si trovi nello stato fondamentale della nuova Hamiltoniana;

(iv) Calcolare il valor medio dell'energia $\langle \psi | H_+ | \psi \rangle$ a $t = 0$;

(v) Dire come il valor medio $\langle \psi(t) | H_+ | \psi(t) \rangle$ dipende dal tempo.

Problema 2.

Si consideri una particella in un potenziale delta.

(i) Dire quanti stati legati ci sono nel potenziale

$$V(x) = -g\,\delta(x), \qquad g > 0. \tag{3}$$

e quali sono i livelli energetici (con $E < 0$).

(ii) Discutere il numero di stati legati come funzione di a e b (con altri parametri del sistema fissi) nel potenziale

$$V(x) = -g\,\delta(x+a) - g\,\delta(x) - g\,\delta(x-b), \qquad g > 0, \quad a, b > 0. \tag{4}$$

Rispondere *senza fare il calcolo esplicito*, considerando le varie situazioni.

Formulario

Alcuni elementi di matrici dell'oscillatore armonico (con la frequenza angolare ω) sono:

$$(x^2)_{nm} = \begin{cases} \frac{\hbar}{m\omega}\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{4}}, & \text{se} \quad m = n+2, \\ \frac{\hbar}{m\omega}\sqrt{\frac{n(n-1)}{4}}, & \text{se} \quad m = n-2, \\ \frac{\hbar}{m\omega}\frac{2n+1}{2}, & \text{se} \quad m = n, \end{cases} \tag{5}$$

$$(p^2)_{nm} = \begin{cases} -m\omega\hbar\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{4}}, & \text{se} \quad m = n+2, \\ -m\omega\hbar\sqrt{\frac{n(n-1)}{4}}, & \text{se} \quad m = n-2, \\ m\omega\hbar\frac{2n+1}{2}, & \text{se} \quad m = n, \end{cases} \tag{6}$$

Le relazioni tra operatori x, p e $a, a^\dagger$ per un oscillatore di frequenza angolare ω:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,p; \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,p, \tag{7}$$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^\dagger); \qquad p = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\,(a - a^\dagger). \tag{8}$$

Soluzione

Problema 1.

(i)

$$P(x)\,dx = |\psi(x)|^2\,dx = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}. \tag{9}$$

(ii) No. La probablilità richiesta è

$$|\langle\psi^{0+}|\psi^{0-}\rangle|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\sqrt{\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}}\left|\int dx\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\, e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar}x^2}\right|^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \simeq 0.743\ldots. \tag{10}$$

(iii)

$$\psi(t) = \sum_n c_n\, e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}\,\psi_n(x), \qquad E_n = \omega\hbar(n+\frac{1}{2}). \tag{11}$$

Visto che $\psi(0)$ è pari, $c_n \neq 0$ soltanto per n pari in (11). Risulta che a $t = \frac{\pi n}{\omega}$, $n = 1, 2, \ldots$, la funzione d'onda ritorna alla stessa forma che aveva a $t = 0$, perciò,

$$P(x)|_{t=\frac{\pi n}{\omega}} = P(x)|_{t=0}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{12}$$

(iv) A $t = 0$,

$$\begin{aligned}\langle\psi|H_+|\psi\rangle &= \langle\psi|\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2|\psi\rangle \\ &= \frac{1}{2m}\frac{m\omega_0\hbar}{2} + \frac{m\omega^2}{2}\frac{\hbar}{2m\omega_0} = \frac{5}{8}\omega\hbar.\end{aligned} \tag{13}$$

Oppure,

$$\begin{aligned}\langle\psi|H_+|\psi\rangle = \langle\psi|\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, |\psi\rangle = \langle\psi|\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 - \frac{3}{2}m\omega^2 x^2|\psi\rangle \\ = \frac{1}{2}\omega_0\hbar - \frac{3}{2}m\omega^2\langle x^2\rangle = \frac{1}{2}\omega_0\hbar - \frac{3}{2}m\omega^2\frac{\hbar}{2m\omega_0} = \frac{5}{8}\omega\hbar.\end{aligned} \tag{14}$$

Un metodo alternativo ancora: si introducono gli operatori di creazione e di distruzione come (7), (8) per H_+; analogamente con b e $b^\dagger$ per H_-.

$$a + a^\dagger = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,x = \frac{1}{\sqrt{2}}(b + b^\dagger); \tag{15}$$

$$a - a^\dagger = i\sqrt{\frac{2}{m\omega\hbar}}\,p = \sqrt{2}(b - b^\dagger); \tag{16}$$

Perciò

$$a = \frac{3}{2\sqrt{2}}b - \frac{1}{2\sqrt{2}}b^\dagger, \tag{17}$$

$$a^\dagger = -\frac{1}{2\sqrt{2}}b + \frac{3}{2\sqrt{2}}b^\dagger, \tag{18}$$

Allora

$$\begin{aligned}H_+ &= \omega\hbar(a^\dagger a + \frac{1}{2}) = \omega\hbar[(-\frac{1}{2\sqrt{2}}b + \frac{3}{2\sqrt{2}}b^\dagger)(\frac{3}{2\sqrt{2}}b - \frac{1}{2\sqrt{2}}b^\dagger) + \frac{1}{2})] \\ &= \omega\hbar[-\frac{3}{8}b^2 + \frac{1}{8}bb^\dagger + \frac{9}{8}b^\dagger b - -\frac{3}{8}b^{\dagger 2} + \frac{1}{2}]\end{aligned} \tag{19}$$

Nello stato fondamentale dell'oscillatore H_- soltanto il termine $bb^\dagger$ e la costante contribuiscono, dando il risultato

$$\langle 0_-|H_+|0_-\rangle = \omega\hbar[\frac{1}{8} + \frac{1}{2}] = \frac{5}{8}\omega\hbar. \tag{20}$$

(v) Il valor medio di H_+, un operatore indipendente dal tempo, è costante del moto in qualsiasi stato.

Problema 2.

(i) Un solo stato legato (la condizione di continuità determina univocamente la funzione d'onda, normalizzabile), con

$$\psi = \sqrt{\kappa} e^{-\kappa x}, \qquad \kappa = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} = \frac{mg}{\hbar^2}. \tag{21}$$

(ii) Uno, due o tre a seconda dei parametri (a, b, g, m). In generale, ci si aspetta che a a e b ambedue molto grandi il sistema avrà una quasi degenerazione tripla (tre stati legati), mentre a $a \to 0$, $b \neq 0$, oppure nel limite $b \to 0$, $a \neq 0$, il sistema avrà al massimo due stati legati. Infine, se $a = b = 0$ il sistema degenera al caso di un singolo potenziale delta, $-3g\delta(x)$. con un solo stato legato.

****

(iii) Per la risposta alle domande, bastano i punti (i) e (ii) sopra.

Per completezza, risolviamo il sistema, ad esempio, per $a = b$. La condizione di continuità a $x = a$ è:

$$A = B e^{\kappa a} + C e^{-\kappa a}; \tag{22}$$

$$-\kappa A - \kappa (B e^{\kappa a} - C e^{-\kappa a}) = -\frac{2mg}{\kappa \hbar^2} A; \tag{23}$$

la condizione di continuità a $x = 0$ è:

$$\kappa (B - C) - \kappa (C - B) = -\frac{2mg}{\kappa \hbar^2} (B + C). \tag{24}$$

Dalla (22) e (23) si trova

$$\frac{B e^{2\kappa a}}{C} = \frac{mg/\kappa\hbar^2}{1 - mg/\kappa\hbar^2}; \tag{25}$$

menre dalla (24) si ha

$$\frac{B}{C} = \frac{1 - mg/\kappa\hbar^2}{1 + mg/\kappa\hbar^2}. \tag{26}$$

Perciò l'equazione che determina l'energia di un livello pari è

$$e^{-2\kappa a} = \frac{(1 - \frac{mg}{\kappa\hbar^2})^2}{\frac{mg}{\kappa\hbar^2}(1 + \frac{mg}{\kappa\hbar^2})} = \frac{(\kappa - \frac{mg}{\hbar^2})^2}{\frac{mg}{\hbar^2}(\kappa + \frac{mg}{\hbar^2})} \tag{27}$$

Per vedere se questa equazione ammette soluzioni, bisgona paragonare la derivata prima (lo slope) delle due curve a $\kappa = 0$, cioè $-2a$ versus $-3\hbar^2/mg$. È chiaro dal grafico che per $a \leq \frac{3\hbar^2}{2mg}$ c'è una sola soluzione alla destra dello zero,

$$\kappa > \frac{mg}{\hbar^2}; \tag{28}$$

mentre $a > \frac{3\hbar^2}{2mg}$ c'è un'altra soluzione (il secondo stato di eccitazione) a

$$\kappa < \frac{mg}{\hbar^2}. \tag{29}$$

Per completezza, per la funzione d'onda dispari (per la quale, $\psi(x)|_{x<0} = -\psi(-x)|_{x>0}$), la condizione di continuità a $x = a$ è lo stesso di prima; la condizione a $x = 0$ è semplicemente

$$B + C = 0. \tag{30}$$

Sostituendo $C = -B$ in (25) si ha

$$e^{2\kappa a} = -\frac{mg/\kappa\hbar^2}{1 - mg/\kappa\hbar^2} = -\frac{mg/\hbar^2}{\kappa - mg/\hbar^2}. \tag{31}$$

Oppure

$$e^{-2\kappa a} = -\frac{\kappa - mg/\hbar^2}{mg/\hbar^2}. \tag{32}$$

Questa equazione ha una o zero soluzioni, a seconda delle incrinazioni a $\kappa = 0$ delle due curve. Dal grafico si vede che per $a \leq \frac{\hbar^2}{2mg}$ non ci sono soluzioni; per $a > \frac{\hbar^2}{2mg}$ c'è una soluzione, a $\kappa < mg/\hbar^2$.

Ricapitolando, c'è un solo stato legato per $a \leq \frac{\hbar^2}{2mg}$; due stati legati (uno pari e uno dispari) per $\frac{\hbar^2}{2mg} < a \leq \frac{3\hbar^2}{2mg}$; infine, ci sono tre stati legati per $a > \frac{3\hbar^2}{2mg}$.