Compitino 2 di Meccanica Quantistica I (A)

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
20 dicembre '07 (A.A. 07/08)

(Tempo a disposizione: 3 ore)

Problema 1.

Un nucleo (A) di spin-parità $J^P = \frac{1}{2}^+$, a riposo, decade in due nuclei, il nucleo B di spin-parità $\frac{1}{2}^+$ e un altro nucleo C di spin-parità 0^-. Il momento angolare totale è conservato nel processo. Il nucleo A, prima del decadimento, è nello stato $(J, J_z) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Vedi Fig. 1.

(i) Dire quali sono i valori possibili del momento angolare orbitale (ℓ) del moto relativo del sistema (B-C), senza assumere la conservazione della parità. (*2 punti*)

(ii) Scrivere la funzione d'onda normalizzata dello stato finale ($B-C$), nei due casi; (a) la parità è conservata; (b) la parità è violata (i.e., con la parità totale dello stato finale uguale a $(-)$). Considerate solamente la parte angolare-spin della funzione d'onda. (*2 punti*)

(iii) Se la parità non è conservata esattamente, la funzione d'onda finale (sempre solo angolare-spin) sarà una combinazione lineare delle due del punto (ii). Siano a e b i coefficienti relativi (incogniti, in generale complessi), tali che $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Determinare la distribuzione angolare del nucleo B, in termini di a e b. La distribuzione angolare di C è uguale a quella di B?

(*3 punti*)

(iv) Determinare il valor medio dell'operatore

$$F = \mathbf{s} \cdot \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|},$$

(polarizzazione lungo la direzione del moto) dove $\mathbf{s}$ è lo spin del nucleo B, $\mathbf{p}$ è il suo impulso, considerato classicamente e nella direzione di

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C \propto (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta),$$

nello stato di cui al punto (iii). In particolare, determinare $\langle F \rangle$ nel caso in cui la parità è conservata e discutere il risultato.

(*1 punti*)

Problema 2.

Si consideri un oscillatore armonico bi-dimensionale con un termine aggiuntivo di interazione,

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + g\,x\,y\,.$$

(i) Trovare gli operatori impulsi P_X, P_Y relativi alle nuove coordinate

$$X \equiv \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \qquad Y \equiv \frac{x-y}{\sqrt{2}},$$

in termini di p_x, p_y, e dimostrare che essi soddisfano i commutatori canonici,

$$[X, P_X] = i\hbar, \qquad [Y, P_Y] = i\hbar, \qquad [X, P_Y] = [Y, P_X] = 0\,.$$

(*4 punti*)

(ii) Scrivere l'Hamiltoniana in termini delle nuove variabili e discutere come lo spettro del sistema (i livelli energetici e la degenerazione) depende da g

(*3 punti*)

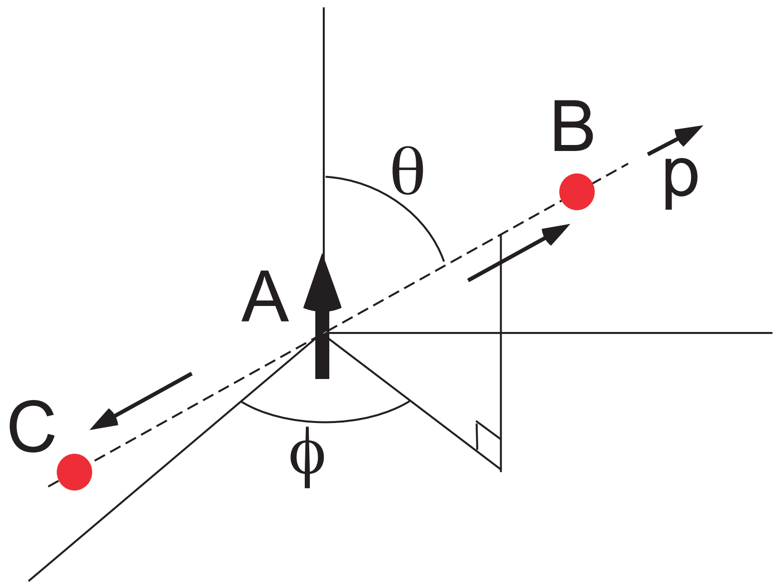

Figura 1:

Soluzione

Problema 1.

(i) Visto che lo spin totale è $1/2$, il momento angolare orbitale è $\ell = 0$ oppure $\ell = 1$.

(ii) Caso (a): la conservazione della parità impone che ℓ sia 1. La funzione d'onda è

$$\psi_+ = \sqrt{\frac{2}{3}} Y_{1,1}(\theta,\phi)|\downarrow\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} Y_{1,0}(\theta,\phi)|\uparrow\rangle = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(\sin\theta\, e^{i\phi} |\downarrow\rangle + \cos\theta |\uparrow\rangle \right).$$

Caso (b): in questo caso si ha $\ell = 0$: la funzione d'onda è:

$$\psi_- = Y_{0,0}(\theta,\phi)|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} |\uparrow\rangle.$$

(iii)

$$\Psi = a\psi_+ + b\psi_- = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left[(b - a\cos\theta) |\uparrow\rangle - a \sin\theta\, e^{i\phi} |\downarrow\rangle \right] \tag{1}$$

La distribuzione angolare è data da:

$$dP = d\theta \sin\theta\, d\phi\, \frac{1}{4\pi} \left[|b - a\cos\theta|^2 + |a \sin\theta\, e^{i\phi}|^2 \right] = d\theta \sin\theta\, d\phi\, \frac{1}{4\pi} \left[1 - 2\Re(ab^*) \cos\theta \right].$$

Scambiare B e C equivale a $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$, o $\theta \to \pi - \theta$, cioè, $\cos\theta \to -\cos\theta$. La distribuzione per B e qualla per C non coincidono per $\Re(ab^*) \neq 0$, cioè, in generale, quando la parità non è conservata.

(iv) Calcolando il valor medio dell'operatore

$$F = \mathbf{s} \cdot \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\phi} \\ \sin\theta\, e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

nello stato (1), si ha

$$\frac{1}{2} \int d\theta \sin\theta\, d\phi\, \frac{1}{4\pi} \left(\cos\theta - 2\Re(ab^*) \right) = -\Re(ab^*).$$

Esso si annulla se la parità è conservata ($b = 0$). Ma tale risultato è da aspettarsi, poiché l'operatore F è dispari per parità, mentre lo stato Ψ ha una parità definita, $(-)$, rispetto al moto orbitale.

Problema 2.

(i) Risolvendo per x, y, si ha

$$x = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{X-Y}{\sqrt{2}},$$

$$p_X = -i\hbar \frac{\partial}{\partial X} = -\frac{i\hbar}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (p_x + p_y); \qquad p_Y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial Y} = -\frac{i\hbar}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (p_x - p_y);$$

la verifica che essi soddisfano la regola di commutazione canonica standard è ovvia.

(ii)

$$p_x^2+p_y^2=P_X^2+P_Y^2,$$

$$x^2+y^2=X^2+Y^2, \qquad xy=\frac{X^2-Y^2}{2}.$$

Sostituendo questi, H diventa

$$\begin{aligned} H &= \frac{P_X^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}X^2+\frac{P_Y^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}Y^2+\frac{g}{2}(X^2-Y^2) \\ &= \frac{P_X^2}{2m}+\frac{m\,[\omega^{(1)}]^2}{2}X^2+\frac{P_Y^2}{2m}+\frac{m\,[\omega^{(2)}]^2}{2}Y^2, \end{aligned} \tag{2}$$

dove

$$\omega^{(1)\,2}=\omega^2+\frac{g}{m}, \qquad \omega^{(2)\,2}=\omega^2-\frac{g}{m}.$$

(iii)

- Finché

  $$|g|<m\omega^2,$$

  il sistema è un oscillatore bi-dimensionale non isotropo, con lo spettro,

  $$E_{n_1,n_2}=\sqrt{\omega^2+\frac{g}{m}}\,\hbar\,(n_1+\frac{1}{2})+\sqrt{\omega^2-\frac{g}{m}}\,\hbar\,(n_2+\frac{1}{2}),$$

  con

  $$n_1=0,1,2,\ldots, \qquad n_2=0,1,2,\ldots$$

  Se g è tale che il rapporto

  $$\sqrt{\omega^2+\frac{g}{m}}\Big/\sqrt{\omega^2-\frac{g}{m}}$$

  è razionale, ci sono delle degenerazioni; altrimenti non ci sono degenerazioni.

- Per

  $$g=m\omega^2, \qquad \text{oppure} \qquad g=-m\omega^2,$$

  si ha un oscillatore in una direzione e un moto libero nell'altro. Per es., per $g=m\omega^2$, lo spettro consiste in uno spettro discreto dell'oscillatore in direzione X,

  $$E_N=\sqrt{2}\,\omega\hbar\,(N+\frac{1}{2}),$$

  sommato al continuo del moto libero nella direzione Y, i.e.,

  $$E=\sqrt{2}\,\omega\hbar\,(N+\frac{1}{2})+\frac{P^2}{2m}\geq\frac{\omega\hbar}{\sqrt{2}}, \qquad -\infty<P<\infty, \quad N=0,1,2,\ldots$$

  La degenerazione dipende dall'energia. Se chiamiamo con D il grado di degenerazione,

  1. Lo stato fondamentale, $E=\omega\hbar/\sqrt{2}$ è singolo ($P=0$). $D=1$.
  2. Ogni livello $\omega\hbar/\sqrt{2}<E<3\omega\hbar/\sqrt{2}$ è doppio. $D=2$.
  3. Il livello $E=3\omega\hbar/\sqrt{2}$ è triplo: $D=3$.
  4. Per $3\omega\hbar/\sqrt{2}<E<5\omega\hbar/\sqrt{2}$, $D=4$,

  etc. In generale, si ha

  $$D=2n+1, \qquad \text{per} \quad E=(2n+1)\,\omega\hbar/\sqrt{2};$$

  $$D=2n, \qquad \text{per} \quad (2n-1)\,\omega\hbar/\sqrt{2}<E<(2n+1)\,\omega\hbar/\sqrt{2}\,.$$

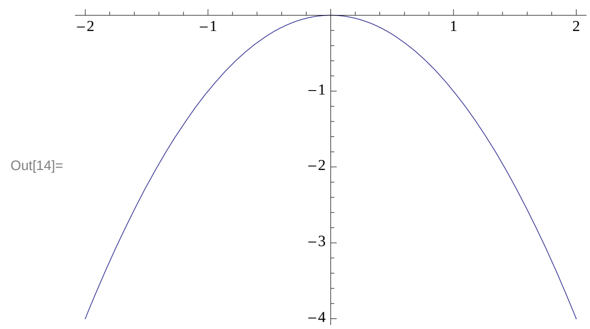

Figura 2:

- Infine, per $g > m\omega^2$, o $g < -m\omega^2$, il sistema è instabile: non ha uno stato fondamentale, un po' come in un sistema unidimensionale con il potentiale,

$$V = -x^2,$$

(Fig. 2).