Compitino 2 di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
22 dicembre 2006 (A.A. 06/07)

Tempo a disposizione: tre ore. Risolvere, a scelta, uno solo dei problemi contrassegnati con *.

Problema 1.

Una particella di spin $\frac{1}{2}$ si trova in uno stato con lo spin diretto nella direzione $\mathbf{n} = (\sin\theta, 0, \cos\theta)$.

(i) Scrivere la funzione d'onda di spin di questo stato;

(ii) Dire qual'è la probabilità che la misura di s_z (per es. con l'apparecchio à la Stern-Gerlach) dia il risultato $s_z = \frac{1}{2}$ in questo stato;

(iii) A $t = 0$ si accende un campo magnetico costante e uniforme, $\mathbf{B} = B(0,1,0)$. L'interazione è descritta da

$$H = -g\,\mathbf{s}\cdot\mathbf{B}.$$

Trovare la funzione d'onda al tempo t, e calcolare la probabilità $P(t)$ di trovare il risultato $s_z = \frac{1}{2}$, in una misura fatta all'istante t; fare uno schizzo di $P(t)$.

(iv) Scrivere l'equazione di Heisenberg per gli operatori di spin (di Heisenberg) $s_{Hx}(t)$, $s_{Hy}(t)$, $s_{Hz}(t)$, e risolverle.

***(v)** Calcolare il valor medio di s_z all'istante t nello schema di Schrödinger (utilizzando il risultato del punto (iii)) e nello schema di Heisenberg (utilizzando il risultato del punto (iv)) e paragonare i risultati.

Al punto (iii) potete usare la formula ($\mathbf{a}$ è un vettore costante)

$$e^{i\mathbf{a}\cdot\sigma} = \cos|\mathbf{a}| + i\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\cdot\sigma\,\sin|\mathbf{a}|.$$

Problema 2.

Una particella di massa m si muove in un potenziale tridimensionale,

$$V(\mathbf{r}) = V(r) = \begin{cases} \infty & r < R, \\ 0 & R \le r \le R+a, \\ \infty & r > R+a, \end{cases} \tag{1}$$

(Fig. 1). Si vuole studiare lo spettro di questo sistema.

(i) Separando le variabili in coordinate sferiche, dire quali sono le condizioni al contorno da imporre sulla funzione radiale;

(ii) Derivare l'equazione che determina implicitamente i livelli di energia, per ciascun valore di ℓ (il momento angolare orbitale).

(iii) Risolvere l'equazione al punto (ii), per $\ell = 0$, trovando tutti i livelli energetici con $\ell = 0$.

***(iv)** Per $a \ll R$, il primo stato eccitato si trova a

$$\Delta E = \frac{\hbar^2}{mR^2}$$

sopra lo stato fondamentale. Spiegare questo risultato, senza risolvere le equazioni di cui al punto (ii), usando solo un ragionamento fisico.

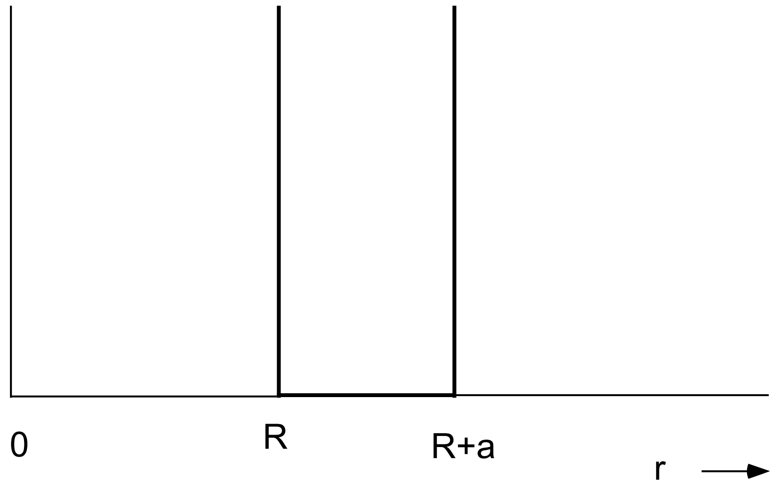

Figura 1:

Soluzione

Problema 1

(i)

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \sin\theta/2 \end{pmatrix}.$$

(ii) $P_\uparrow = \cos^2\frac{\theta}{2}$.

(iii) L'evoluzione temporale viene descritta da

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle,$$

$$e^{-iHt/\hbar} = e^{i\frac{gBt}{2\hbar}\sigma_y} = \cos\frac{gBt}{2\hbar} + i\sigma_y \sin\frac{gBt}{2\hbar} = \begin{pmatrix} \cos\frac{gBt}{2\hbar} & \sin\frac{gBt}{2\hbar} \\ -\sin\frac{gBt}{2\hbar} & \cos\frac{gBt}{2\hbar} \end{pmatrix}$$

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{gBt}{2\hbar} & \sin\frac{gBt}{2\hbar} \\ -\sin\frac{gBt}{2\hbar} & \cos\frac{gBt}{2\hbar} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \sin\theta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2} - \frac{gBt}{2\hbar}) \\ \sin(\frac{\theta}{2} - \frac{gBt}{2\hbar}) \end{pmatrix}:$$

lo spin ruota nel piano $x - z$.

$$P(t) = \cos^2(\frac{\theta}{2} - \frac{gBt}{2\hbar}).$$

(iv)

$$i\hbar\dot{s}_{Hx}(t) = [s_{Hx}(t), H] = -gB[s_{Hx}, s_{Hy}] = -gB\, i\, s_{Hz},$$
$$i\hbar\dot{s}_{Hy}(t) = [s_{Hy}(t), H] = -gB[s_{Hy}, s_{Hy}] = 0;$$
$$i\hbar\dot{s}_{Hz}(t) = [s_{Hz}(t), H] = -gB[s_{Hz}, s_{Hy}] = -gB(-i)\, s_{Hx},$$

Cioè,

$$s_{Hy}(t) = s_{Hy}(0) = s_y = \text{cost.};$$

$$\dot{s}_{Hx}(t) = -\frac{gB}{\hbar} s_{Hz}, \qquad \dot{s}_{Hz}(t) = \frac{gB}{\hbar} s_{Hx}.$$

$$\ddot{s}_{Hx}(t) = -(\frac{gB}{\hbar})^2 s_{Hx}(t); \qquad \ddot{s}_{Hz}(t) = -(\frac{gB}{\hbar})^2 s_{Hz}(t).$$

Integrando le ultime equazioni, si ha

$$s_{Hx}(t) = s_x \cos(\frac{gB}{\hbar}t) - s_z \sin(\frac{gB}{\hbar}t); \qquad s_{Hz}(t) = s_z \cos(\frac{gB}{\hbar}t) + s_x \sin(\frac{gB}{\hbar}t),$$

dove $s_{x,y,z}$ sono gli operatori di Schrödinger.

(v) Nello schema di Schrödinger,

$$\langle\psi(t)|s_z|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}[\cos^2(\frac{\theta}{2} - \frac{gBt}{2\hbar}) - \sin^2(\frac{\theta}{2} - \frac{gBt}{2\hbar})] = \frac{1}{2}\cos(\theta - \frac{gBt}{\hbar}).$$

Nello schema di Heisenberg,

$$s_{Hz}(t) = s_z \cos(\frac{gB}{\hbar}t) + s_x \sin(\frac{gB}{\hbar}t) == \begin{pmatrix} \cos\frac{gB}{\hbar} & \sin\frac{gBt}{\hbar} \\ \sin\frac{gBt}{\hbar} & -\cos\frac{gB}{\hbar} \end{pmatrix}.$$

$$\langle\psi|s_{Hz}(t)|\psi\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{gBt}{\hbar} & \sin\frac{gBt}{\hbar} \\ \sin\frac{gBt}{\hbar} & -\cos\frac{gBt}{\hbar} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \sin\theta/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cos(\frac{gBt}{\hbar} - \theta),$$

che coincide con il risultato nello schema di Schrödinger.

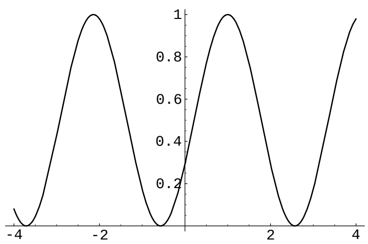

Figura 2:

Problema 2

(i) La condizione da imporre è

$$R_{\ell,k}(R) = R_{\ell,k}(R+a) = 0.$$

(ii) La soluzione generale ha la forma

$$R_{\ell,k}(r) = A\, j_\ell(kr) + B n_\ell(kr),$$

quindi le condizioni al contorno sono

$$A\, j_\ell(kR) + B n_\ell(kR) = 0; \qquad A\, j_\ell(k(R+a)) + B n_\ell(k(R+a)) = 0.$$

La condizione per cui questa equazione ha una soluzione non nullo per A, B, è

$$\det \begin{vmatrix} j_\ell(kR) & n_\ell(kR) \\ j_\ell(k(R+a)) & n_\ell(k(R+a)) \end{vmatrix} = 0.$$

(iii) Per $\ell = 0$,

$$j_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr}; \qquad n_0(kr) = \frac{\cos kr}{kr}.$$

La condizione sopra diventa

$$\sin kR \cos k(R+a) - \sin k(R+a) \cos kR = -\sin ka = 0,$$

per cui

$$k = \frac{\pi n}{a}, \qquad \therefore \quad E_n = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2ma^2}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Questo è lo stesso della buca uni-dimensionale.

(iv) Per una particella che si muove con raggio fisso ($r = R$) l'energia è data dal termine centrifugo,

$$\sim \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mR^2}.$$

Per la particella in questione, l'energia deve essere la somma dell'energia di eccitazione radiale $E_n = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2ma^2}$ e l'energia del moto rotatorio, $\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mR^2}$. Quindi per il primo stato eccitato l'energia sarà ($\ell = 1$)

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} + \frac{2\hbar^2}{2mR^2}$$