Compitino 1 di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
30 novembre 2010 (A.A. 10/11)

(Tempo a disposizione: 2 ore)

Problema 1.

Problema 2.

Una particella di massa m si muove in un potenziale unidimensionale,

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < -a, \\ V_0 & -a \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < a, \\ \infty & x > a\ . \end{cases} \tag{1}$$

($V_0 > 0$ è costante). (Fig. **??**)

(i) Trovare l'equazione implicita per determinare i livelli energetici: considerare il caso $E > V_0$ e il caso $0 < E < V_0$ separatamente. Discutere il limite, $V_0 \to \infty$.

(ii) Trovare le condizioni per (V_0, a) perché uno degli stati stazionari abbia l'energia esattamente $E = V_0$. Determinare la funzione d'onda a meno di una costante moltiplicativa nella regione $-a \leq x < 0$ in questi casi, o direttamente risolvendo l'equazione di Schrödinger, o considerando il limite (e.g.) del caso $E > V_0$, $E \to V_0$.

(iii) Per i valori di V_0 al di sotto di un valore critico V_c tutti gli stati stazionari hanno energia $E > V_0$. Trovare V_c approssimativamente, con l'aiuto del grafico in Fig. **??**.

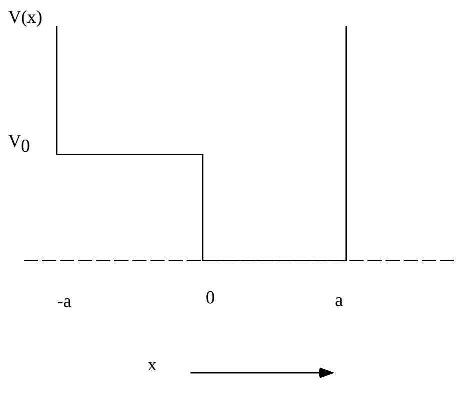

Figura 1: La buca di potenziale del problema 1

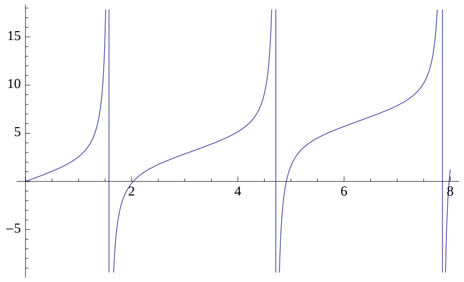

Figura 2: La funzione $f(x) = \tan x + x$.

Soluzione

(i)

- Considerando prima il caso $E > V_0$, la funzione d'onda nella regione $-a \leq x < 0$, può essere scritta come

$$\psi_I = A \sin k'(x+a), \qquad k' = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} \tag{2}$$

La funzione d'onda nella regione $0 \leq x < a$ invece ha una forma generale

$$\psi_{II} = B \sin k(x-a), \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \tag{3}$$

Le condizioni di continuità a $x = 0$ sono:

$$A \sin k'a = -B \sin ka; \qquad Ak' \cos k'a = Bk \cos ka; \tag{4}$$

perciò

$$\boxed{\frac{\tan k'a}{k'} = -\frac{\tan ka}{k},} \qquad k' = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}; \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{5}$$

- Per gli autovalori con $E < V_0$, la condizioione (**??**) è valida con la sostituzione,

$$k' \to i\kappa, \qquad \kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}, \tag{6}$$

$$\tan k'a = \frac{e^{ik'a} - e^{-ik'a}}{i(e^{ik'a} + e^{-ik'a})} \to i \tanh \kappa a, \tag{7}$$

la funzione d'onda prende forma

$$\psi_I = \tilde{A} \sinh \kappa(x+a), \qquad \kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar} \tag{8}$$

per cui l'equazione per gli autovalori diventa

$$\boxed{\frac{\tanh \kappa a}{\kappa} = -\frac{\tan ka}{k},} \qquad \kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}, \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \tag{9}$$

(ii) Per uno stato di $E = V_0$, $k' = 0$, $\therefore$ la condizione di continuità (**??**) o (**??**) si riduce a

$$\frac{\tan ka}{ka} = -1, \qquad \text{con} \quad k = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}. \tag{10}$$

Esistono perciò stati con $E = V_0$ se (V_0, a) soddisfano questa condizione (visto che questa equazione ammette ovviamente soluzioni per (V_0, a)).

È interessante osservare che per uno stato con $E = V_0$, la funzione d'onda nella regione $-a \leq x \leq 0$ risulta di forma lineare,

$$\psi_I(x) = C \cdot (x + a), \tag{11}$$

che si ottiene o risolvendo l'equazione di Schrödinger direttamente (per $E = V_0$ essa si riduce a $\psi'' = 0$, ma la funzione d'onda deve annullarsi a $x = -a$), o considerando il limite $k' \to 0$ nella (**??**). Nel secondo metodo va preso il limite

$$k' \to 0, \qquad A \to \infty, \tag{12}$$

di modo che il prodotto

$$C = k' \cdot A \tag{13}$$

sia tenuto fisso.

(iii) Per dimostrare che esistono i livelli energetici con $E < V_0$ soltanto per V_0 sufficientemente grande, basta considerare V_0 (e perciò E) arbitrariamente piccolo. Per tale V_0, sia $ka = \frac{\sqrt{2mE}\,a}{\hbar}$ che $\kappa a = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}\,a}{\hbar}$ possono essere presi arbitrariamente piccoli. Ma allora

$$-\frac{\tan ka}{ka} \simeq -1, \qquad \frac{\tanh \kappa a}{\kappa a} \simeq 1, \tag{14}$$

perciò la condizione per uno stato stazionario con $E < V_0$, la (**??**), non può essere soddisfatta.

Per trovare V_c approssimativamente basta studiare a quale valore di V_0 l'autovalore $E > V_0$ passa a $E < V_0$. Perciò bisogna trovare, ad aumentare V_0, quando appare l'autovalore $E = V_0$ per la prima volta. Questo accade alla radice più piccola di

$$-\frac{\tan ka}{ka} = 1, \qquad k = \frac{\sqrt{2mV_c}}{\hbar}.$$

Dalla prima radice di $f(x) = \tan x + x = 0$ (Fig. **??**), troviamo che

$$\frac{\sqrt{2mV_c}a}{\hbar} \simeq 2\,, \qquad \therefore \quad V_c \simeq \frac{2\hbar^2}{ma^2}.$$

Problema 2.

(i) La nuova Hamiltoniana, H_1 è

$$H_1 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{4} + \frac{m\omega^2 b^2}{4} \ : \tag{15}$$

essa è di nuovo un semoplice oscillatore centrato all'origine, con la frequenza angolare

$$\omega_1 = \omega/\sqrt{2}\,. \tag{16}$$

L'energia dello stato fondamentale è dunque

$$E_0 = \frac{\omega_1 \hbar}{2} + \frac{m\omega^2 b^2}{4} = \frac{\omega\hbar}{2\sqrt{2}} + \frac{m\omega^2 b^2}{4}\,. \tag{17}$$

(ii)

$$P_0 = |{}_1\langle 0|0\rangle|^2 = |\left(\frac{m\omega_1}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\int dx\, e^{-m\omega_1 x^2/2\hbar} e^{-m\omega x^2/2\hbar}|^2 = \tag{18}$$

(iii) Trovare la probabilità che la particella si trova nel primo stato eccitato stato fondamentale della nuova Hamiltoniana. Risposta: Nulla (per parità).

(iv) Trovare la probabilità che la particella si trova nell'n-simo stato eccitato del nuovo sistema.

Conviene introdurre gli operatori di creazione e annichirazione.

Soluzione