

Compitino 1 di Meccanica Quantistica (A)

4 Novembre 2016 - Università di Pisa

(tempo a disposizione: 2 ore)

Problema 1

Un sistema a due stati ha una Hamiltoniana

$$H = E_0 \mathbf{1} + \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

- (1) Determinare gli autostati e gli autovalori di H .

All'istante $t = 0$ si misura la variabile F , descritta da

$$\hat{F} = f \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f > 0. \quad (1.2)$$

Supponiamo che questa misura abbia dato il risultato maggiore fra i possibili valori di F , f_+ .

- (2) Calcolare la probabilità $P_+(t)$ che al tempo t la misura di F dia di nuovo il risultato f_+ . Calcolare anche la probabilità $P_-(t)$ per la misura di f_- .
- (3) Calcolare la probabilità $P_+^{(1)}(2t)$ che all'istante $2t$ la misura di F dia di nuovo il risultato f_+ nel seguente caso: si supponga che la misura di F al tempo t sia stata eseguita, ma che l'osservatore della seconda misura non abbia accesso al risultato della misura al tempo t .
- (4) Calcolare la probabilità $P_+^{(2)}(2t)$ che la misura di F all'istante $2t$ dia il risultato f_+ , nel caso la misura di F non venga fatta al tempo t . Dimostrare che $P_+^{(1)}(2t) > P_+^{(2)}(2t)$ per un generico valore di t .

Problema 2

Consideriamo due particelle di massa m con una Hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 \quad (1.3)$$

La (1.3) può essere considerata come una schematizzazione, molto rozza, dell'Hamiltoniana di una molecola biatomica omonucleare. I livelli energetici sono definiti come gli autovalori di H nel sistema del centro di massa.

- 1) Scrivere i valori dei livelli energetici.
- 2) Si consideri la molecola di idrogeno e quella di deuterio (nucleo formato da un protone e da un neutrone, di massa circa uguale). Le due molecole sono identiche dal punto di vista elettronico, quindi possiamo assumere che la costante elastica k sia la stessa nei due casi. Quando la molecola passa dal primo stato eccitato allo stato fondamentale emette un fotone. C'è una relazione fra la frequenza del fotone emesso nel caso della molecola D_2 e quello per la molecola H_2 ?

Problema 3

Una particella di massa m è soggetta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} \frac{m}{2} \omega^2 x^2, & x > 0, \\ \infty, & x < 0. \end{cases}$$

- (i) Scrivere l'energia e la funzione d'onda dello stato fondamentale.
- (ii) Dire qual è lo spettro completo dell'energia.

Soluzione Problema 1

1)

Gli autostati dell'Hamiltoniana sono

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \quad (1.4)$$

con relative energie

$$E_1 = E_0 + \hbar\omega , \quad E_2 = E_0 - \hbar\omega . \quad (1.5)$$

2)

Invertendo la relazione

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle) , \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle) \quad (1.6)$$

sono gli autostati di F . Dunque a $t = 0$, dopo la misura, il sistema si trova nello stato $|+\rangle$. Al tempo t , lo stato è

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iE_0 t/\hbar} \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\omega t}|1\rangle + e^{i\omega t}|2\rangle) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\omega t}|1\rangle + e^{i\omega t}|2\rangle) . \quad (1.7)$$

L'ampiezza di probabilità di ritrovare il sistema nello stato $|+\rangle$ è

$$\mathcal{A} = \langle +|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) = \cos \omega t \quad (1.8)$$

da cui la probabilità

$$P_+(t) = \cos^2 \omega t . \quad (1.9)$$

La probabilità di trovare il sistema nello stato $|-\rangle$ è invece

$$P_-(t) = \sin^2 \omega t . \quad (1.10)$$

Se a $t = 0$ la misura avesse dato il risultato f_- , il sistema si troverebbe nello stato $|-\rangle$ a tempo $t = 0+$. Un calcolo analogo dimostra che le probabilità di trovare i risultati f_{\pm} della misura di F a tempo t sono

$$\tilde{P}_+(t) = \sin^2 \omega t , \quad \tilde{P}_-(t) = \cos^2 \omega t . \quad (1.11)$$

3)

In questo caso la probabilità di trovare il risultato f_+ all'istante $2t$ è data dalla probabilità composta:

$$P_+^{(1)}(2t) = (P_+(t))^2 + \tilde{P}_+(t)P_-(t) = \cos^4 \omega t + \sin^4 \omega t . \quad (1.12)$$

4)

Nel caso non c'è stata nessuna misura a t , il sistema evolve fino al tempo $2t$ secondo l'equazione di Schrödinger. Dunque la misura di F a tempo $2t$ darà il risultato f_+ con probabilità,

$$P_+^{(2)}(2t) = \cos^2 2\omega t . \quad (1.13)$$

Usando $\cos 2\omega t = \cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t$, si ha

$$P_+^{(2)}(2t) = (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t)^2 < P_+^{(1)}(2t) , \quad (1.14)$$

per generico valore di t . La differenza è da attribuire al termine di interferenza, tipica di meccanica quantistica.

Soluzione Problema 2

(1) Cambiando le variabili a quelle del C.M. e del moto relativo,

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad x = x_1 - x_2, \quad P = -i\hbar \frac{\partial}{\partial X}, \quad p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad (1.15)$$

l'Hamiltoniana diventa

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}kx^2, \quad M = 2m, \quad \mu = \frac{m}{2}. \quad (1.16)$$

La parte del moto relativo (che è la sola parte di interesse nel C.M., $P = 0$) è

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2}x^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{2k}{m}}. \quad (1.17)$$

I valori energetici sono dunque

$$E_n = \omega\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.18)$$

Un'altra forma di cambio variabili possibile è

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad Y = \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad P_X = -i\hbar \frac{\partial}{\partial X}, \quad P_Y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial Y}. \quad (1.19)$$

Il risultato è uguale.

(2) Nel caso della molecola di deuterio, $m \rightarrow 2m$, quindi

$$\tilde{E}_n = \tilde{\omega}\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \quad (1.20)$$

La frequenza del fotone emesso nella transizione di D_2 , $\tilde{\nu} = \tilde{\omega}/2\pi$, è più piccola di fattore $\sqrt{2}$, rispetto a quella del fotone emesso nella transizione di H_2 , $\nu = \omega/2\pi$, i.e., $\tilde{\nu} = \nu/\sqrt{2}$.

Soluzione Problema 2

Visto che $\psi(0) = 0$ e visto che l'equazione di Schroedinger a $x > 0$ è la stessa dell'oscillatore senza il muro a $x = 0$, le soluzioni di questo problema sono semplicemente tutti i livelli dispari, i.e., con le funzioni d'onda dispari, che si annullano a $x = 0$. Le funzioni d'onda sono $\psi_n(x)$ con n dispari, con la costante di normalizzazione $\sqrt{2}$ volte più grande. Si noti che i livelli dispari $n = 1, 3, 5, \dots$ dell'oscillatore usuale hanno $n = 1, 3, 5, \dots$ nodi, rispettivamente. Nella semiretta, $0 < x < \infty$, tralasciando lo zero a $x = 0$, queste funzioni d'onda hanno esattamente $0, 1, 2, \dots$ nodi, in accordo con il teorema di oscillazione. Questa è un'ulteriore conferma che le autofunzioni trovate così, senza nessun calcolo, esauriscono tutti i possibili stati discreti.

(i) Lo stato fondamentale:

$$E_0 = \frac{3}{2}\omega\hbar, \quad \psi_0(x) = Cxe^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}, \quad (1.21)$$

con

$$C = \frac{2\alpha^{3/2}}{\pi^{1/4}}, \quad \alpha \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}. \quad (1.22)$$

(ii) Lo spettro completo è dato da

$$E_n = \omega\hbar(2n + \frac{3}{2}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.23)$$