

## Compitino II MQ

05 febbraio '15 (A.A. 14/15)

Tempo a disposizione: 3 ore.

### Problema 1.

Una particella A di spin  $J = 2$  e parità negativa decade, a riposo, in due particelle identiche B di spin  $\frac{1}{2}$ .

- (i) Dire quali possono essere a priori i valori dello spin totale  $S$ , ( $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ ), nello stato finale.
- (ii) Per ciascuno dei valori possibili di  $S$ , elencare i possibili valori di  $L$ , il momento angolare orbitale del moto relativo nello stato finale, tenendo conto solo della conservazione del momento angolare e della parità, ma senza tenere conto della statistica di Fermi-Dirac.
- (iii) Infine, determinare, tenendo conto della statistica, le possibili combinazioni  $(S, L)$  nello stato finale.

Risulta che le considerazioni di cui ai punti (i)-(iii) non determinano univocamente i valori  $(S, L)$ . Supponiamo che la dinamica del processo di decadimento sia tale che la combinazione  $(S, L)$  con  $L$  minimo sia dominante. Sapendo questo, e sapendo che la particella A prima del decadimento fosse nello stato  $|J, J_z\rangle = |2, 1\rangle$ ,

- (iv) scrivere la funzione d'onda orbitale-spin nello stato finale;
- (v) calcolare la distribuzione angolare di B, indipendentemente dallo spin.
- (vi) La misura di  $s_z$  di una delle particelle finali fatta con un apparecchio à la SG posto nella direzione  $(\theta, \phi) = (\frac{\pi}{4}, 0)$  ha dato  $s_z = \frac{1}{2}$ . Sapendo ciò, calcolare la probabilità che la misura di  $s_z$  dell'altra particella finale, eseguita contemporaneamente <sup>1</sup> dia  $s'_z = \frac{1}{2}$ .

### Problema 2.

L'Hamiltoniana dell'atomo di idrogeno è modificato da un potenziale aggiuntivo  $V_0(r) = \frac{f}{r^2}$ ,

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r), \quad V(r) = V_{Coul}(r) + V_0(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{f}{r^2}, \quad (1)$$

dove  $f > 0$  è una costante positiva.

(N.B. Nella soluzione, non deve essere utilizzata la teoria delle perturbazioni. )

- (i) Fare uno schizzo del potenziale totale  $V(r)$ .

Come si verifica facilmente (si veda il formulario) l'equazione di Schrödinger radiale per (1) è *formalmente* identica all'equazione radiale per l'atomo di idrogeno ( $f = 0$ ), tranne che per la sostituzione  $\ell \rightarrow \beta$ , dove  $\beta$  è una costante che dipende da  $\ell$  e da  $f$ .

<sup>1</sup>con SG posto a  $(\theta, \phi) = (\frac{3\pi}{4}, \pi)$ )

- (ii) Trovare  $\beta$  ( $\beta > 0$ ) in termini di  $\ell$  e di  $f$ , per generico valore di  $f$ . Basta considerare la soluzione per  $\beta$  positiva.

I livelli dell'energia degli stati legati nel potenziale (1) si trovano notando che l'equazione radiale, avendo la stessa forma dell'equazione per l'atomo di idrogeno, eccetto la sostituzione  $\ell \rightarrow \beta$ , ha una soluzione normalizzabile per i valori dell'energia tali<sup>2</sup> che

$$\lambda = \beta + k + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

dove

$$\lambda \equiv \sqrt{\frac{1}{-2E}}, \quad (E \text{ in unita' di } \frac{e^2}{r_B}). \quad (3)$$

- (iii) Trovare i livelli energetici  $E(k, \ell; f)$ , usando  $\beta$  trovato al punto (ii).

- (iv) Verificare che per  $f = 0$  lo spettro si riduce a quello di Bohr. Per piccolo  $f \neq 0$ , sviluppare  $E(k, \ell; f)$  al primo ordine in  $f$ , esprimendo la risposta nella forma

$$E(k, \ell; f) = E_n^{(Bohr)} [1 + \epsilon(n, \ell) f + \dots], \quad n = k + \ell + 1, \quad (4)$$

determinando  $\epsilon(n, \ell)$ .

- (v) Discutere se e come la degenerazione caratteristica dell'atomo di idrogeno viene modificata dal termine  $\epsilon(n, \ell) f$ , e interpretare fisicamente l'aspetto qualitativo di tale modifica.

*Formulario: l'Equazione di Schrödinger radiale.*

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] R(r) = 0.$$

---

<sup>2</sup>**N.B.:** Questa condizione segue dal metodo di Frobenius (la soluzione dell'equazione radiale col sviluppo in serie di potenze in  $r$  di  $R(r)$ : qui la prendete come dato di fatto).

### 34. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND $d$ FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, e.g., for  $-8/15$  read  $-\sqrt{8/15}$ .

	$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$    $Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$    $Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$    $Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$    $Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$																																																																																																																																																																																<img alt="Diagram of Clebsch-Gordan coefficients for J=1, M=-174" data-bbox="2

## Soluzione

N.B. Per un misterioso problema di LaTeX (che per ora non riesco a sistemare) hbar appare come semplice h nelle formule sotto.

### Problema 1

- (i) Lo spin totale può prendere i valori  $S = 1$  e  $S = 0$ .
- (ii)  $L = 2$  per  $S = 0$ . Per  $S = 1$ , invece,  $L$  può essere uno dei valori  $L = 1, 2, 3$ . Infine tenendo conto anche della parità rimangono gli stati  $S = 1$  e  $L = 1, 3$ .
- (iii) La funzione d'onda di spin è o simmetrico ( $S = 1$ ) o antisimmetrico ( $S = 0$ ), mentre le funzioni orbitali sono o simmetrica o antisimmetrica a seconda del valore di  $L$  (pari o dispari). Segue che le possibili combinazioni sono  $(S, L) = (1, 1)$  o  $(1, 3)$ ,  $(0, 2)$ . Tenendo conto delle considerazioni ai punti (i) e (ii) (momento angolare e parità), gli stati premessi restano  $(S, L) = (1, 1)$  o  $(1, 3)$ . Risulta che in questo particolare processo, la statistica di Fermi-Dirac non dà un vincolo in più rispetto alle considerazioni ai punti (i) e (ii).
- (iv) Secondo l'ipotesi, lo stato finale è dominantemente nello stato  $(S, L) = (1, 1)$ , che forma il momento angolare totale  $|J, J_z\rangle = (2, 1)$ . Utilizzando i Coeff. CG, si ha perciò

$$\Psi_{2,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( Y_{1,1}(\theta, \phi) \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} + Y_{1,0}(\theta, \phi) |\uparrow\uparrow\rangle \right); \quad (5)$$

- (iv) La distribuzione angolare sarà:

$$dP = \Psi_{2,1}^\dagger \Psi_{2,1} d\Omega = \frac{1}{2} (|Y_{1,1}(\theta, \phi)|^2 + |Y_{1,0}(\theta, \phi)|^2) d\Omega = \frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \theta) d\Omega;$$

$d\Omega = d\phi d\cos\theta$ . Essa è correttamente normalizzata.

- (v) La funzione d'onda (5) nella direzione di  $\theta, \phi = \frac{\pi}{4}, 0$ , considerata come funzione d'onda di spin normalizzata è

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{6}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle - 2|\uparrow\uparrow\rangle).$$

La probabilità richiesta è:

$$P(s_{2z} = \uparrow)|_{s_{1z}=\uparrow} = \frac{4}{5}.$$

N.B. La risposta non è  $\frac{2}{3}$ .

### Problema 2.

- (i)

$$\frac{d^2}{dr^2} R + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} R - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R + \frac{2m}{\hbar^2} (E + \frac{e^2}{r} - \frac{f}{r^2}) R = 0. \quad (6)$$

Si vede che l'aggiunta del termine  $\propto f$  è equivalente ad una modifica di  $\ell$ ,  $\ell \rightarrow \beta$ , dove

$$\beta(\beta+1) = \ell(\ell+1) + \frac{2mf}{\hbar^2}. \quad (7)$$

Risolvendo si ha la soluzione positiva

$$\beta = \frac{1}{2} \left[ -1 + \sqrt{(2\ell+1)^2 + \frac{8mf}{\hbar^2}} \right]$$

(iii) Si ha

$$E_{k,\ell} = -\frac{\hbar^2}{2m \left( k + \frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{(2\ell+1)^2 + \frac{8mf}{\hbar^2}} \right] \right)^2}$$

Ripristinando le costanti dimensionali ( $\frac{me^2}{\hbar^2} = 1$ ),

$$E_{k,\ell} = -\frac{e^2}{2r_B} \left( k + \frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{(2\ell+1)^2 + \frac{8mf}{\hbar^2}} \right] \right)^{-2}, \quad k=0,1,2,\dots, \quad \ell=0,1,2,\dots$$

Per  $f=0$ , il risultato è

$$E_{k,\ell} = -\frac{e^2}{2r_B (k+\ell+1)^2}$$

che coincide con i livelli di Bohr se si identifica

$$n = k + \ell + 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Per  $f$  piccolo, i livelli energetici sono dati approssimativamente da

$$E_{k,\ell} \simeq -\frac{e^2}{2r_B n^2} \left( 1 - \frac{4mf}{n(2\ell+1)\hbar^2} \right), \quad (8)$$

i.e.,

$$\epsilon(n, \ell) = -\frac{4m}{n(2\ell+1)\hbar^2}.$$

- (i) La degenerazione  $\propto n^2$  dell'atomo di idrogeno viene eliminata parzialmente: l'unica degenerazione che resta è quella dovuta all'invarianza per rotazione,  $2\ell+1$  per stati con  $\ell$  definito.
- (ii) Tutti i livelli si innalzano un poco.
- (iii) Secondo la (8) l'incremento dell'energia (quindi lo spostamento) dal livello di Bohr, è più grande per gli stati di momenti angolari orbitali più bassi, e per le orbite più basse. Ambedue i fatti si comprendono dalla forma del potenziale aggiuntivo,  $\propto \frac{1}{r^2}$ , e dall'andamento della funzione radiale vicino all'origine,  $\sim r^\ell$ , tenendo conto della figura della modifica del potenziale (punto (i)) (vedi la Fig.2). L'effetto di tale modifica (piccola) del potenziale, importante solo vicino all'origine, è meno rilevante per gli stati con la funzione d'onda più piccola a  $r \sim 0$ , i.e. gli stati con  $\ell$  o  $n$  grandi. E vice versa.

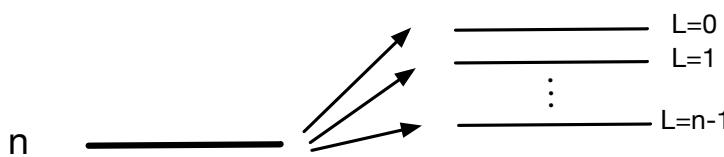


Figura 2: