

Compitino II MQ

05 febbraio '15 (A.A. 14/15)

Tempo a disposizione: 3 ore.

Problema 1.

Una particella A di spin $J = 2$ e parità negativa decade, a riposo, in due particelle identiche B di spin $\frac{1}{2}$.

- (i) Dire quali possono essere a priori i valori dello spin totale S , ($\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$), nello stato finale.
- (ii) Per ciascuno dei valori possibili di S , elencare i possibili valori di L , il momento angolare orbitale del moto relativo nello stato finale, tenendo conto solo della conservazione del momento angolare e della parità, ma senza tenere conto della statistica di Fermi-Dirac.
- (iii) Infine, determinare, tenendo conto della statistica, le possibili combinazioni (S, L) dello stato finale.

Risulta che le considerazioni di cui ai punti (i)-(iii) non determinano univocamente i valori (S, L) . Supponiamo che la dinamica del processo di decadimento sia tale che la combinazione (S, L) con L minimo sia dominante. Sapendo questo, e sapendo che la particella A prima del decadimento fosse nello stato $|J, J_z\rangle = |2, 1\rangle$,

- (iv) scrivere la funzione d'onda orbitale-spin dello stato finale;
- (v) calcolare la distribuzione angolare di B, indipendentemente dallo spin.
- (vi) La misura di s_z di una delle particelle finali fatta con un apparecchio à la SG posto nella direzione $(\theta, \phi) = (\frac{\pi}{4}, 0)$ ha dato $s_z = \frac{1}{2}$. Sapendo ciò, calcolare la probabilità che la misura di s_z dell'altra particella finale, eseguita contemporaneamente¹ dia $s'_z = \frac{1}{2}$.

Problema 2.

L'Hamiltoniana dell'atomo di idrogeno è modificato da un potenziale aggiuntivo $V_0(r) = \frac{f}{r^2}$,

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r), \quad V(r) = V_{Coul}(r) + V_0(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{f}{r^2}, \quad (1)$$

dove $f(> 0)$ è una costante positiva.

(N.B. Nella soluzione, non deve essere utilizzata la teoria delle perturbazioni.)

- (i) Fare uno schizzo del potenziale totale $V(r)$.

Come si verifica facilmente (si veda il formulario) l'equazione di Schrödinger radiale per (1) è *formalmente* identica all'equazione radiale per l'atomo di idrogeno ($f = 0$), tranne che per la sostituzione $\ell \rightarrow \beta$, dove β è una costante che dipende da ℓ e da f .

¹ con SG posto a $(\theta, \phi) = (\frac{3\pi}{4}, \pi)$

- (ii) Trovare β ($\beta > 0$) in termini di ℓ e di f , per generico valore di f . Basta considerare la soluzione per β positiva.

I livelli dell'energia degli stati legati nel potenziale (1) si trovano notando che l'equazione radiale, avendo la stessa forma dell'equazione per l'atomo di idrogeno, eccetto la sostituzione $\ell \rightarrow \beta$, ha una soluzione normalizzabile per i valori dell'energia tali ² che

$$\lambda = \beta + k + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

dove

$$\lambda \equiv \sqrt{\frac{1}{-2E}}, \quad (E \text{ in unita' di } \frac{e^2}{r_B}). \quad (3)$$

- (iii) Trovare i livelli energetici $E(k, \ell; f)$, usando β trovato al punto (ii).
 (iv) Verificare che per $f = 0$ lo spettro si riduce a quello di Bohr. Per piccolo $f \neq 0$, sviluppare $E(k, \ell; f)$ al primo ordine in f , esprimendo la risposta nella forma

$$E(k, \ell; f) = E_n^{(Bohr)} [1 + \epsilon(n, \ell) f + \dots], \quad n = k + \ell + 1, \quad (4)$$

determinando $\epsilon(n, \ell)$.

- (v) Discutere se e come la degenerazione caratteristica dell'atomo di idrogeno viene modificata dal termine $\epsilon(n, \ell) f$, e interpretare fisicamente l'aspetto qualitativo di tale modifica.

Formulario: l'Equazione di Schrödinger radiale.

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] R(r) = 0.$$

²**N.B.:** Questa condizione segue dal metodo di Frobenius (la soluzione dell'equazione radiale col sviluppo in serie di potenze in r di $R(r)$: qui la prendete come dato di fatto).

34. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

J	J	...
M	M	...
m_1	m_2	
m_1	m_2	
...	...	
...	...	

Coefficients

$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$
 $Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$
 $Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$
 $Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$
 $Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$

$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$
 $d_{\ell,0}^\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m e^{-im\phi}$

$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 JM \rangle$
 $= (-1)^{J-j_1-j_2} \langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 JM \rangle$

$d_{m',m}^j = (-1)^{m-m'} d_{-m,-m'}^j$

$d_{0,0}^1 = \cos \theta$
 $d_{1/2,1/2}^{1/2} = \cos \frac{\theta}{2}$
 $d_{1,1}^1 = \frac{1+\cos \theta}{2}$
 $d_{1/2,-1/2}^{1/2} = -\sin \frac{\theta}{2}$
 $d_{1,0}^1 = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}$
 $d_{1,-1}^1 = \frac{1-\cos \theta}{2}$

$d_{3/2,3/2}^{3/2} = \frac{1+\cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$
 $d_{3/2,1/2}^{3/2} = -\sqrt{3} \frac{1+\cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$
 $d_{3/2,-1/2}^{3/2} = \sqrt{3} \frac{1-\cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$
 $d_{3/2,-3/2}^{3/2} = -\frac{1-\cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$
 $d_{1/2,1/2}^{3/2} = \frac{3\cos \theta - 1}{2} \cos \frac{\theta}{2}$
 $d_{1/2,-1/2}^{3/2} = -\frac{3\cos \theta + 1}{2} \sin \frac{\theta}{2}$
 $d_{2,2}^2 = \left(\frac{1+\cos \theta}{2} \right)^2$
 $d_{2,1}^2 = -\frac{1+\cos \theta}{2} \sin \theta$
 $d_{2,0}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4} \sin^2 \theta$
 $d_{2,-1}^2 = -\frac{1-\cos \theta}{2} \sin \theta$
 $d_{2,-2}^2 = \left(\frac{1-\cos \theta}{2} \right)^2$
 $d_{1,1}^2 = \frac{1+\cos \theta}{2} (2\cos \theta - 1)$
 $d_{1,0}^2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta \cos \theta$
 $d_{1,-1}^2 = \frac{1-\cos \theta}{2} (2\cos \theta + 1)$
 $d_{0,0}^2 = \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$

Figure 34.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.

Figure 1:

Soluzione

N.B. Per un misterioso problema di LaTeX (che per ora non riesco a sistemare) hbar appare come semplice h nelle formule sotto.

Problema 1

- (i) Lo spin totale può prendere i valori $S = 1$ e $S = 0$.
- (ii) $L = 2$ per $S = 0$. Per $S = 1$, invece, L può essere uno dei valori $L = 1, 2, 3$. Infine tenendo conto anche della parità rimangono gli stati $S = 1$ e $L = 1, 3$.
- (iii) La funzione d'onda di spin è o simmetrico ($S = 1$) o antisimmetrico ($S = 0$), mentre le funzioni orbitali sono o simmetrica o antisimmetrica a seconda del valore di L (pari o dispari). Segue che le possibili combinazioni sono $(S, L) = (1, 1)$ o $(1, 3)$, $(0, 2)$. Tenendo conto delle considerazioni ai punti (i) e (ii) (momento angolare e parità), gli stati premessi restano $(S, L) = (1, 1)$ o $(1, 3)$.
- Risulta che in questo particolare processo, la statistica di Fermi-Dirac non dà un vincolo in più rispetto alle considerazioni al punti (i) e (ii).
- (iv) Secondo l'ipotesi, lo stato finale è dominatamente nello stato $(S, L) = (1, 1)$, che forma il momento angolare totale $|J, J_z\rangle = (2, 1)$. Utilizzando i Coeff. CG, si ha perciò

$$\Psi_{2,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(Y_{1,1}(\theta, \phi) \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} + Y_{1,0}(\theta, \phi) |\uparrow\uparrow\rangle \right); \quad (5)$$

- (iv) La distribuzione angolare sarà:

$$dP = \Psi_{2,1}^\dagger \Psi_{2,1} d\Omega = \frac{1}{2} (|Y_{1,1}(\theta, \phi)|^2 + |Y_{1,0}(\theta, \phi)|^2) d\Omega = \frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \theta) d\Omega;$$

$d\Omega = d\phi d\cos\theta$. Essa è correttamente normalizzata.

- (v) La funzione d'onda (5) nella direzione di $\theta, \phi = \frac{\pi}{4}, 0$, considerata come funzione d'onda di spin normalizzata è

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{6}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle - 2|\uparrow\uparrow\rangle).$$

La probabilità richiesta è:

$$P(s_{2z} = \uparrow)_{|s_{1z} = \uparrow} = \frac{4}{5}.$$

N.B. La risposta non è $\frac{2}{3}$.

Problema 2.

- (i)

$$\frac{d^2}{dr^2} R + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} R - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{r} - \frac{f}{r^2} \right) R = 0. \quad (6)$$

Si vede che l'aggiunta del termine $\propto f$ è equivalente ad una modifica di ℓ , $\ell \rightarrow \beta$, dove

$$\beta(\beta+1) = \ell(\ell+1) + \frac{2mf}{\hbar^2}. \quad (7)$$

Risolvendo si ha la soluzione positiva

$$\beta = \frac{1}{2} \left[-1 + \sqrt{(2\ell+1)^2 + \frac{8mf}{\hbar^2}} \right]$$

(iii) Si ha

$$E_{k,\ell} = - \frac{\hbar^2}{2m \left(k + \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{(2\ell+1)^2 + \frac{8mf}{\hbar^2}} \right] \right)^2}$$

Ripristinando le costanti dimensionali ($\frac{me^2}{\hbar^2} = 1$),

$$E_{k,\ell} = - \frac{e^2}{2r_B} \left(k + \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{(2\ell+1)^2 + \frac{8mf}{\hbar^2}} \right] \right)^{-2}, \quad k=0,1,2,\dots, \quad \ell=0,1,2,\dots$$

Per $f=0$, il risultato è

$$E_{k,\ell} = - \frac{e^2}{2r_B (k+\ell+1)^2}$$

che coincide con i livelli di Bohr se si identifica

$$n = k + \ell + 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Per f piccolo, i livelli energetici sono dati approssimativamente da

$$E_{k,\ell} \simeq - \frac{e^2}{2r_B n^2} \left(1 - \frac{4mf}{n(2\ell+1)\hbar^2} \right), \quad (8)$$

i.e.,

$$\epsilon(n, \ell) = - \frac{4m}{n(2\ell+1)\hbar^2}.$$

- (i) La degenerazione $\propto n^2$ dell'atomo di idrogeno viene eliminata parzialmente: l'unica degenerazione che resta è quella dovuta all'invarianza per rotazione, $2\ell+1$ per stati con ℓ definito.
- (ii) Tutti i livelli si innalzano un poco.
- (iii) Secondo la (8) l'incremento dell'energia (quindi lo spostamento) dal livello di Bohr, è più grande per gli stati di momenti angolari orbitali più bassi, e per le orbite più basse. Ambedue i fatti si comprendono dalla forma del potenziale aggiuntivo, $\propto \frac{1}{r^2}$, e dall'andamento della funzione radiale vicino all'origine, $\sim r^\ell$, tenendo conto della figura della modifica del potenziale (punto (i)) (vedi la Fig.2). L'effetto di tale modifica (piccola) del potenziale, importante solo vicino all'origine, è meno rilevante per gli stati con la funzione d'onda più piccola a $r \sim 0$, i.e, gli stati con ℓ o n grandi. E vice versa.

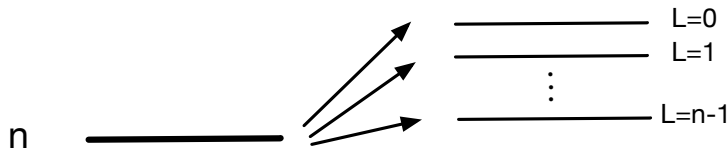


Figura 2: