Meccanica Quantistica: Compitino III

8 aprile 2016 (A.A. 15/16)

Tempo a disposizione: 2 ore

Risolvere, a scelta, o il Problema 2 (iii) o il Problema 2 (iv)

Problema 1.

Una particella legata ad un potenziale delta unidimensionale

$$V_0(x) = -g\,\delta(x)\;, \qquad g > 0\;, \tag{1}$$

viene perturbata, a partire da $t = 0$, da un campo esterno

$$V = c\,\hat{p}\,e^{-i\omega t} + h.c. \tag{2}$$

($\hat{p}$ è l'operatore impulso; c è una costante.)

(i) Dire qual'è la soglia della frequenza ω al di sotto della quale non avviene l'ionizzazione.

(ii) Calcolare la probabilità della transizione al continuo per un intervallo unitario di tempo.

Problema 2.

Un atomo di idrogeno è sottoposto ad un campo elettrico esterno debole. Il potenziale di perturbazione è dato da

$$H' = \varepsilon xy\;. \tag{3}$$

(i) Determinare la correzione all'energia dello stato fondamentale, al primo ordine in ε.

(ii) Elencare tutte le coppie di stati degeneri di $n = 2$, tra i quali

$$\langle 2, \ell', m' | H' | 2, \ell, m \rangle \neq 0\;. \tag{4}$$

Elencare tutte le relazioni tra tali elementi di matrice ottenibili dal teorema di Wigner-Eckart.

(iii) Lo stesso problema per gli stati di $n = 3$.

(iv) Calcolare, utilizzando il risultato del punto (ii), le correzioni all'energia del livello $n = 2$, al primo ordine in ε.

Soluzione

Problema 1

Lo stato legato ha l'energia e la funzione d'onda,

$$E_0 = -\frac{mg^2}{2\hbar^2} \, , \qquad \psi_0(x) = \sqrt{\kappa}\, e^{-\kappa|x|} \, , \qquad \kappa = \frac{mg}{\hbar^2} \, . \tag{5}$$

Secondo la formula di Fermi, il rate di transizione è dato da:

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |F_{fi}|^2 \, \rho(E_f)|_{E_f = E_0 + \omega\hbar} \, . \tag{6}$$

L'elemento di matrice è dato da:

$$\begin{aligned} F_{fi} &= \sqrt{\kappa} c(-i\hbar) \int dx \, e^{-ikx} \frac{\partial}{\partial x} [e^{\kappa x} \theta(-x) + e^{-\kappa x} \theta(x)] \\ &= \sqrt{\kappa} c(-i\hbar)(ik) \int dx \, e^{-ikx} [e^{\kappa x} \theta(-x) + e^{-\kappa x} \theta(x)] \\ &= \sqrt{\kappa} c \hbar k \left(\int_{-\infty}^{0} e^{(\kappa - ik)x} + \int_{0}^{\infty} e^{-(\kappa + ik)x} \right) \\ &= \sqrt{\kappa} c \hbar k \left(\frac{1}{\kappa - ik} + \frac{1}{\kappa + ik} \right) = \frac{2\, c \, \hbar \, k \, \kappa^{3/2}}{\kappa^2 + k^2} \end{aligned} \tag{7}$$

e la densità di stati (contando sia la particella che viaggia verso la destra e quella che va versa la sinistra)

$$\rho = \frac{m}{\pi p \hbar} = \frac{m}{\pi k \hbar^2} \, . \tag{8}$$

Raccogliendo i fattori, si ha

$$w = \frac{8\, m\, c^2 \, k\, \kappa^3}{\hbar(\kappa^2 + k^2)^2} \, , \qquad k \equiv \frac{\sqrt{2m(\omega\hbar - mg^2/2\hbar^2)}}{\hbar} \, . \tag{9}$$

La soglia per l'ionizzazione è a:

$$\omega_{soglia} = \frac{mg^2}{2\hbar^3} \tag{10}$$

Problema 2

(i) Il potenziale $H' = \varepsilon xy$. è un tensore sferico del tipo

$$H' = T_2^2 - T_{-2}^2 \, . \tag{11}$$

La correzione al primo ordine all'energia del fondamentale è

$$\langle 1,0,0|T_2^2 - T_{-2}^2|1,0,0\rangle = 0 \, , \tag{12}$$

per W-E.

(ii) Gli stati di $n = 2$ sono $|n;\ell,m\rangle = |2;1,1\rangle, |2;1,0\rangle, |2;1,-1\rangle, |2;0,0\rangle$. Gli elementi di matrice

$$\langle 2,\ell',m'|H'|2,\ell,m\rangle = \langle 2,\ell',m'|T_2^2 - T_{-2}^2|2,\ell,m\rangle \, . \tag{13}$$

non nulli sono:

$$\langle 2,1,1|H'|2,1,-1\rangle \, , \quad \langle 2,1,-1|H'|2,1,1\rangle \tag{14}$$

e la loro relazione è data da:

$$\langle 2,1,1|H'|2,1,-1\rangle = \langle 2,1,1|T^2_2|2,1,-1\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\langle 2,1||T^2||2,1\rangle\ ; \tag{15}$$

$$\langle 2,1,-1|H'|2,1,1\rangle = -\langle 2,1,-1|T^2_{-2}|2,1,1\rangle = -\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\langle 2,1||T^2||2,1\rangle, \tag{16}$$

quindi

$$\langle 2,1,1|H'|2,1,-1\rangle = -\langle 2,1,-1|H'|2,1,1\rangle\ . \tag{17}$$

(iii) Gli stati di $n = 3$ sono nove:

$$|3;2,2\rangle,\quad |3;2,1\rangle,\quad |3;2,0\rangle,\quad |3;2,-1\rangle,\quad |3;2,-2\rangle, \tag{18}$$

$$|3;1,1\rangle,\quad |3;1,0\rangle,\quad |3;1,-1\rangle, \tag{19}$$

$$|3;0,0\rangle\ . \tag{20}$$

Tenendo conto anche della parità, gli elementi di matrice non nulli sono:

$$\langle 3,2,2|H'|3,2,0\rangle = \langle 3,2,2|T^2_2|3,2,0\rangle = \sqrt{\frac{2}{7}}\langle 3,2||T^2||3,2\rangle\ ;$$

$$\langle 3,2,2|H'|3,0,0\rangle = \langle 3,2,2|T^2_2|3,0,0\rangle = \langle 3,2||T^2||3,0\rangle\ ;$$

$$\langle 3,2,1|H'|3,2,-1\rangle = \langle 3,2,1|T^2_2|3,2,-1\rangle = \sqrt{\frac{3}{7}}\langle 3,2||T^2||3,2\rangle\ ;$$

$$\langle 3,2,0|H'|3,2,-2\rangle = \langle 3,2,0|T^2_2|3,2,-2\rangle = \sqrt{\frac{2}{7}}\langle 3,2||T^2||3,2\rangle\ ;$$

$$\langle 3,2,0|H'|3,2,2\rangle = -\langle 3,2,0|T^2_{-2}|3,2,2\rangle = -\sqrt{\frac{2}{7}}\langle 3,2||T^2||3,2\rangle\ ;$$

$$\langle 3,2,-1|H'|3,2,1\rangle = -\langle 3,2,-1|T^2_{-2}|3,2,1\rangle = -\sqrt{\frac{3}{7}}\langle 3,2||T^2||3,2\rangle\ ;$$

$$\langle 3,2,-2|H'|3,2,0\rangle = -\langle 3,2,-2|T^2_{-2}|3,2,0\rangle = -\sqrt{\frac{2}{7}}\langle 3,2||T^2||3,2\rangle\ ;$$

$$\langle 3,2,-2|H'|3,0,0\rangle = -\langle 3,2,-2|T^2_{-2}|3,0,0\rangle = -\langle 3,2||T^2||3,0\rangle\ ;$$

$$\langle 3,1,1|H'|3,1,-1\rangle = \langle 3,1,1|T^2_2|3,1,-1\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}\langle 3,1||T^2||3,1\rangle\ ;$$

$$\langle 3,1,-1|H'|3,1,1\rangle = -\langle 3,1,-1|T^2_{-2}|3,1,1\rangle = -\sqrt{\frac{3}{5}}\langle 3,1||T^2||3,1\rangle\ ;$$

$$\langle 3,0,0|H'|3,2,2\rangle = -\langle 3,0,0|T^2_{-2}|3,2,2\rangle = -\sqrt{\frac{1}{5}}\langle 3,0||T^2||3,2\rangle\ ;$$

$$\langle 3,0,0|H'|3,2,-2\rangle = \langle 3,0,0|T^2_2|3,2,-2\rangle = \sqrt{\frac{1}{5}}\langle 3,0||T^2||3,2\rangle\ ;$$

Le relazioni non banali che seguono sono:

$$\begin{aligned} &\langle 3,2,2|H'|3,2,0\rangle = \langle 3,2,0|H'|3,2,-2\rangle = -\langle 3,2,0|H'|3,2,2\rangle \\ = \quad & -\langle 3,2,-2|H'|3,2,0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\langle 3,2,1|H'|3,2,-1\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 3,2,-1|H'|3,2,1\rangle \end{aligned}$$

$$\langle 3,2,2|H'|3,0,0\rangle = -\langle 3,2,-2|H'|3,0,0\rangle\ ,$$

$$\langle 3,0,0|H'|3,2,-2\rangle = -\langle 3,0,0|H'|3,2,2\rangle\ ,$$

(iv) Calcolare, utilizzando il risultato del punto (ii), le correzioni all'energia del livello $n = 2$, al primo ordine in ε.

Grazie alla relazione (17) l'unico elemento di matrice da calcolare è

$$\langle 2,1,1|H'|2,1,-1\rangle = \varepsilon\langle 2,1,1|xy|2,1,-1\rangle = \varepsilon\int drr^4(R_{2,1})^2 \int d\Omega\, Y^*_{1,1}\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi Y_{1,-1}\,.$$

L'integrale radiale è:

$$\int drr^4(R_{2,1})^2 = \frac{1}{24}\int drr^6 e^{-r} = \frac{6!}{24} = 30 = 30\,r_B^2\,; \tag{21}$$

l'integrale angolare dà:

$$-\frac{3}{8\pi}\int d(\cos\theta)\sin^4\theta\int d\phi\, e^{-2i\phi}\cos\phi\sin\phi = -\frac{3}{8\pi}\frac{16}{15}\frac{-i\pi}{2} = \frac{i}{5}. \tag{22}$$

Raccogliendo tutto

$$\langle 2,1,1|H'|2,1,-1\rangle = -\langle 2,1,-1|H'|2,1,1\rangle = 6\varepsilon r_B^2\,; \tag{23}$$

diagonalizzando la matrice $H'_{4\times 4}$ tra gli stati di $n = 2$, si hanno le correzioni

$$\Delta E = \pm 6\varepsilon r_B^2\,; \qquad |\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2,1,1\rangle \mp i|2,1,-1\rangle)\,; \tag{24}$$

$$\Delta E = 0, \qquad |2,1,0\rangle, \quad |2,0,0\rangle\,; \tag{25}$$