

Meccanica Quantistica: Compitino II

12 febbraio 2016 (A.A. 15/16)

Tempo a disposizione: 2.5 ore

Problema 1

Una particella di massa m si muove liberamente all'interno di una sfera di raggio R . Determinare i primi 7 livelli di energia in ordine crescente, specificando il valore del momento angolare per ciascuno. Potete usare Fig.1.

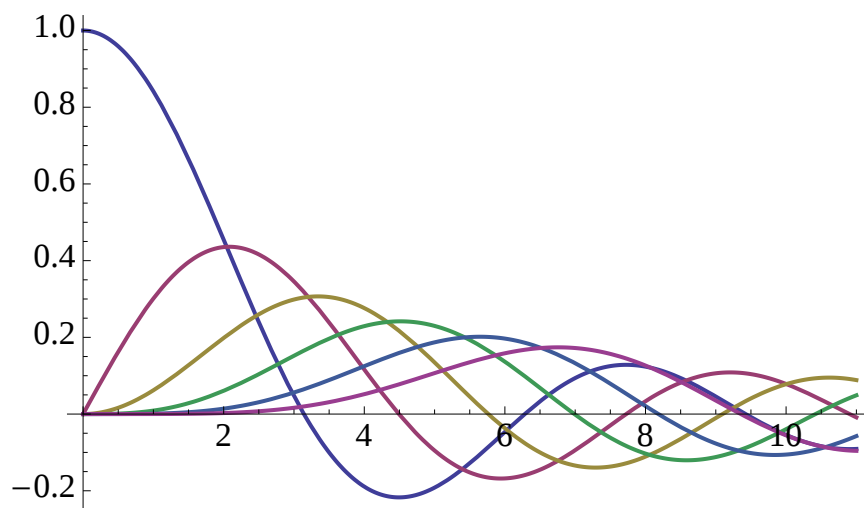


Figura 1: I grafici di $j_l(x)$ come funzione di x , per alcuni primi valori di l .

Problema 2

Un nucleo A di spin $J_A = \frac{5}{2}$, a riposo, decade in due nuclei B e C, rispettivamente di spin $s_B = 1$ e di spin $s_C = \frac{1}{2}$.

- 1) Quali valori può assumere *a priori* lo spin totale S_{tot} ,

$$\mathbf{S}_{tot} = \mathbf{s}_B + \mathbf{s}_C \quad (1)$$

?

- 2) Per ciascuno dei valori di S_{tot} elencati al punto sopra, indicare i valori del momento angolare orbitale L del moto relativo ($B - C$) nello stato finale, ammessi dalla conservazione del momento angolare.
- 3) Si supponga che la misura della distribuzione angolare del nucleo B abbia dato il risultato consistente con una distribuzione,

$$\propto \sin^2 \theta d\Omega \quad (2)$$

nel centro di massa di B e C. Dire, sapendo solo questo fatto, se si può dedurre il valore di S_{tot} e/o $S_{tot,z}$ e con quali risultati.

Soluzione

Problema 1

La funzione d'onda radiale è data dalle onde sferiche libere e regolari all'origine, $j_\ell(kr)$. Gli stati stazionari sono quelli che soddisfano la condizione al contorno al bordo,

$$j_\ell(kR) = 0,$$

i.e., i livelli di energia sono semplicemente dati dagli zeri di $j_\ell(x)$. Indicando i livelli in termini di (n, ℓ) , $n = 1, 2, \dots$, $\ell = 0, 1, 2, \dots$, essi hanno l'energia,

$$E_{n,\ell} = \frac{k_{n,\ell}^2 \hbar^2}{2m} = \frac{a_{n,\ell}^2 \hbar^2}{2mR^2},$$

dove $a_{n,\ell}$ è l' n -simo zero della funzione Bessel sferiche $j_\ell(x)$. Dall'andamento vicino ad $x = 0$ si evince che i grafici rappresentano $j_\ell(x)$ per $\ell = 0, 1, \dots, 5$. I primi sette livelli sono allora $\{n, \ell, ; E\}$ (E in unità di $\frac{\hbar^2}{2mR^2}$):

n	ℓ	E
1	0	9.9
1	1	20.2
1	2	33.2
2	0	39.5
1	3	48.8
2	1	59.7
1	4	70.0

Tabella 1:

Problema 2

Un nucleo A di spin $\frac{5}{2}$, a riposo, decade in due nuclei B e C, rispettivamente di spin $s_B = 1$ e di spin $s_C = \frac{1}{2}$.

1)

$$S_{tot} = \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2}.$$

2) Per $S_{tot} = \frac{3}{2}$, $L = 1, 2, 3, 4$. Per $S_{tot} = \frac{1}{2}$, $L = 2, 3$.

3) Tal distribuzione angolare suggerisce che la funzione d'onda angolare è data da $Y_{1,1}$ oppure $Y_{1,-1}$, i.e. $L = 1$, $L_z = \pm 1$. In questo caso si può dedurre che $S_{tot} = \frac{3}{2}$.

Ora nella composizione di

$$\frac{3}{2} \otimes 1 = \frac{5}{2} \oplus \dots$$

lo stato $|\frac{5}{2}, J_z\rangle$, ($J_z = \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \dots, -\frac{5}{2}$), è dato come una combinazione lineare di $|\frac{3}{2}, S_{tot,z}\rangle Y_{1,m}$, $m = 1, 0, -1$, di modo che $S_{tot,z} + m = J_z$.

Si vede dalla tabella di CG che una possibilità che la distribuzione angolare è descritta semplicemente dall'armonica sferica $Y_{1,1}$ o $Y_{1,-1}$, i.e., sono i casi in cui lo stato iniziale è $|\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\rangle$ o $|\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\rangle$, $S_{tot} = \frac{3}{2}$. E nei due casi, $S_{tot,z} = \frac{3}{2}$, o $S_{tot,z} = -\frac{3}{2}$, rispettivamente.

Quindi certamente $S_{tot} = \frac{3}{2}$, e $S_{tot,x} = \pm \frac{3}{2}$, sono i valori compatibili con la