Compitino I di Meccanica Quantistica

13 novembre 2015 - Università di Pisa

(tempo a disposizione: 2 ore)

Problema 1

Un fascio di elettroni incide perpendicolarmente su una faccia di un metallo. L'interazione si può schematizzare come dovuta ad un potenziale del tipo

$$V(x) = V_a(x) + V_b(x)$$

con

$$V_a(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -V_0 \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\beta^2 & x \geq 0 \end{cases} \quad ; \qquad V_b(x) = \frac{\hbar^2}{m}\gamma\,\delta(x)$$

V_b simula un effetto di superficie.

Calcolare la probabilità di riflessione per un fascio che incide da sinistra con energia E.

Problema 2

Una particella di massa m descritta dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

si trova nello stato fondamentale, con la funzione d'onda $\psi_0(x)$.

All'istante $t = 0$ si accende istantaneamente un campo elettrico $\mathcal{E}$, la particella ha carica q. L'accensione è istantanea quindi immediatamente dopo la funzione d'onda dello stato è ancora $\psi_0(x)$.

1) Scrivere la funzione d'onda $\varphi_0(x)$ dello stato fondamentale del nuovo sistema, $H + V_{\mathcal{E}}$.

2) Se si effettua una misura subito dopo l'accensione, qual è la probabilità di trovare la particella nello stato fondamentale $|\varphi_0\rangle$?

3) Quali sono le probabilità, invece, di trovarla nell'n -simo stato del nuovo sistema $|\varphi_n\rangle = |n\rangle$? *N.B. Basta indicare la strategia del calcolo.*

4) Le probabilità calcolate ai punti 2), 3) come dipendono dal tempo?

Potete usare, occorrendo, le formule:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\ell}}e^{-\frac{x^2}{2\ell^2}} \ , \qquad \ell \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \ ; \quad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a - a^\dagger) \ ;$$

$$e^{i\hat{p}x_0/\hbar}\chi(x) = \chi(x + x_0) \ ; \qquad e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \ .$$

Soluzione problema 1

Per l'energia si ponga

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$$

A destra il numero d'onda è

$$\frac{\hbar^2}{2m} q^2 = E_0 + V_0 \,; \quad q = \sqrt{k^2 + \beta^2}$$

La funzione d'onda nelle zone $x < 0$ e $x > 0$ ha la forma

$$\psi = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx} & x < 0 \\ Te^{iqx} & x > 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Le condizioni da imporre sono la continuità ed il salto della derivata prima:

$$\psi(0^+) = \psi(0^-) \,; \qquad \frac{\hbar^2}{2m} \int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} \psi'' = \int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} \frac{\hbar^2}{m} \gamma \delta(x) \psi(x) \,,$$

cioè

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = 2\gamma \psi(0)$$

Usando la (1.1) si ottengono le condizioni

$$1 + R = T \,; \quad iqT - ik(1 - R) = 2\gamma T$$

con soluzioni

$$R = \frac{k - q - 2i\gamma}{k + q + 2i\gamma} \,; \qquad T = 1 + R = \frac{2k}{k + q + 2i\gamma} \tag{1.2}$$

La probabilità di riflessione è

$$P_R = |R|^2 = \frac{(k - q)^2 + 4\gamma^2}{(k + q)^2 + 4\gamma^2}$$

La probabilità di trasmissione è

$$P_T = \frac{j_{tr}}{j_{inc}} = \frac{q}{k} |T|^2 = \frac{q}{k} \frac{4k^2}{(k + q)^2 + 4\gamma^2} = \frac{4kq}{(k + q)^2 + 4\gamma^2}$$

ed in effetti effetuando la somma

$$P_R + P_T = 1 \,.$$

Soluzione problema 2

1)
In presenza di un campo elettrico $\mathcal{E}$ l'Hamiltoniana diventa (interazione di dipolo)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - qx\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(x - \frac{q}{m\omega^2}\mathcal{E}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{q^2}{m\omega^2}\mathcal{E}^2 \quad (1.3)$$

si ha quindi un oscillatore con centro di oscillazione in $x_0 = q\mathcal{E}/m\omega^2$ e stessa frequenza di prima.

La funzione d'onda dello stato fondamentale del nuovo sistema è

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\sqrt{\ell}} e^{-\frac{1}{2}(x-x_0)^2/\ell^2} , \qquad \ell \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \quad (1.4)$$

2)
Visto che la particella si trova nello stato $\psi_0(x)$, La probabilità richiesta è

$$P_0 = |\langle \varphi_0 | \psi_0 \rangle|^2$$

L'integrale si effettua facilmente con la sostituzione $x \to z + x_0/2$ e ricordando la normalizzazione di ψ_0:

$$\begin{aligned} c_0 = \langle \varphi_0 | \psi_0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\ell} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2/\ell^2} e^{-\frac{1}{2}(x-x_0)^2/\ell^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\ell} \int_{-\infty}^{\infty} dz \, \exp(-\frac{1}{2}(z + \frac{x_0}{2})^2 - \frac{1}{2}(z - \frac{x_0}{2})^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\ell} \int_{-\infty}^{\infty} dz \, e^{-z^2/\ell^2} e^{-x_0^2/4} = \exp(-x_0^2/4\ell^2) \end{aligned}$$

Quindi

$$P_0 = \exp(-x_0^2/2\ell^2) \; ; \quad x_0 = q\mathcal{E}/m\omega^2 \; . \quad (1.5)$$

3) Conviene scrivere la funzione d'onda della particella subito dopo l'accensione come

$$\psi_0(x) = \varphi_0(x + x_0) \; . \quad (1.6)$$

Lavorando ora con il nuovo sistema, scrivo

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= e^{i\hat{p}x_0/\hbar}|0\rangle = e^{\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x_0(a-a^\dagger)}|0\rangle = e^{-x_0^2/4\ell^2} \; e^{-\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x_0 a^\dagger} e^{\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x_0 a}|0\rangle \\ &= e^{-x_0^2/4\ell^2} \; e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}\frac{x_0}{\ell}a^\dagger}|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \; . \end{aligned} \quad (1.7)$$

dove

$$c_n = e^{-x_0^2/4\ell^2} \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\frac{x_0}{\ell}\right)^n / \sqrt{n!} \; . \quad (1.8)$$

Quindi

$$P_n = e^{-x_0^2/2\ell^2} \left(\frac{x_0^2}{2\ell^2} \right)^n /n! \; . \tag{1.9}$$

Per $n = 0$ abbiamo riprodotto il risultato del calcolo del punto 2).

4) $|\varphi_n\rangle$ in

$$|\psi_0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |\varphi_n\rangle$$

sono autostati della nuova Hamiltoniana e quindi al trascorrere del tempo

$$|\psi_0\rangle_t = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-iE_n t/\hbar} |\varphi_n\rangle$$

i coefficienti c_n acquistano solo un fattore di fase, quindi le probabilità non cambiano col tempo.