Meccanica Quantistica: Compitino I

14 novembre 2014 (A.A. 14/15)

Tempo a disposizione: 2 ore

Problema 1

Un sistema a due stati (e.g., $K_0, \bar{K}_0$) è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & E_0 \end{pmatrix}, \qquad E_0 \gg \varepsilon > 0. \tag{1}$$

(i) Trovare gli autovalori e relativi autostati.

Il sistema si trova all'istante $t = 0$ nello stato fondamentale di (1). La misura di una variabile S descritto dall'operatore

$$S = \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

in questo stato ha dato il risultato, $S = +\beta$. Sapendo questo,

(ii) determinare le probabilità di trovare i risultati $S = \beta$ o $S = -\beta$, in una misura successiva fatta al tempo t.

Problema 2

Una particella di massa m si muove in un potenziale unidimensionale,

$$V(x) = -f\,\delta(x) + f\,\delta(x-a)\,. \tag{3}$$

(i) Trovare la condizione perché questo sistema abbia uno stato legato.

Supponiamo che la particella sia legata al potenziale (3).

(ii) Discutete cosa potrebbe succedere quando la posizione del potenziale delta ripulsivo, a, si sposta adiabaticamente verso $x = 0$, mentre la buca attrattiva resta a $x = 0$?

Problema 3

Una particella si muove, attratta da due centri di forze armoniche,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\kappa}{2}x^2 + \frac{\kappa}{2}(x-b)^2\,. \tag{4}$$

(i) Determinare i livelli dell'energia;

(ii) Calcolare il valor di aspettazione degli operatori, x e p, nello stato fondamentale.

Soluzione

1

Gli autovalori sono
$$E = E_0 - \varepsilon, \quad E_0 + \varepsilon, \tag{5}$$
per lo stato fondamentale (F) e per lo stato eccitato (E), con rispettivi autostati,
$$|F\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)\,, \qquad |E\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)\,, \tag{6}$$
A $t = 0$ il sistema è nello stato
$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|F\rangle + |E\rangle)\,. \tag{7}$$
Questo stato evolve nel tempo a
$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-iE_0 t/\hbar}\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\varepsilon t/\hbar}|F\rangle + e^{-i\varepsilon t/\hbar}|E\rangle) \\ &= e^{-iE_0 t/\hbar}(\cos\varepsilon t/\hbar)|1\rangle + \sin\varepsilon t/\hbar)|2\rangle)\,. \end{aligned} \tag{8}$$
Le probabilità sono
$$P_1 = \cos^2\varepsilon t/\hbar, \qquad P_{-1} = \sin^2\varepsilon t/\hbar\,. \tag{9}$$

2

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{\kappa x}, & x < 0, \\ Be^{\kappa x} + Ce^{-\kappa x} & 0 < x < a, \\ De^{-\kappa x}, & x < 0. \end{cases} \tag{10}$$
Cond. raccord a $x = 0$:
$$\psi_+^{'} - \psi_-^{'} = -\frac{2mf}{\hbar^2}\psi(0), \tag{11}$$
i.e.
$$A = B + C, \tag{12}$$
$$\kappa\{(B-C) - A\} = -\frac{2mf}{\hbar^2}A, \qquad B - C = (1 - \frac{2mf}{\kappa\hbar^2})A. \tag{13}$$
Cioè
$$B = (1 - \frac{mf}{\kappa\hbar^2})A; \qquad C = \frac{mf}{\kappa\hbar^2}A. \tag{14}$$
Si ha
$$\frac{B}{C} = \frac{1 - \frac{mf}{\kappa\hbar^2}}{\frac{mf}{\kappa\hbar^2}} \tag{15}$$

Ripetendo l'analisi a $x = a$ si ha
$$\psi_+^{'}(a) - \psi_-^{'}(a) = \frac{2mf}{\hbar^2}\psi(a), \tag{16}$$
i.e.
$$\tilde{D} = \tilde{B} + \tilde{C}, \tag{17}$$

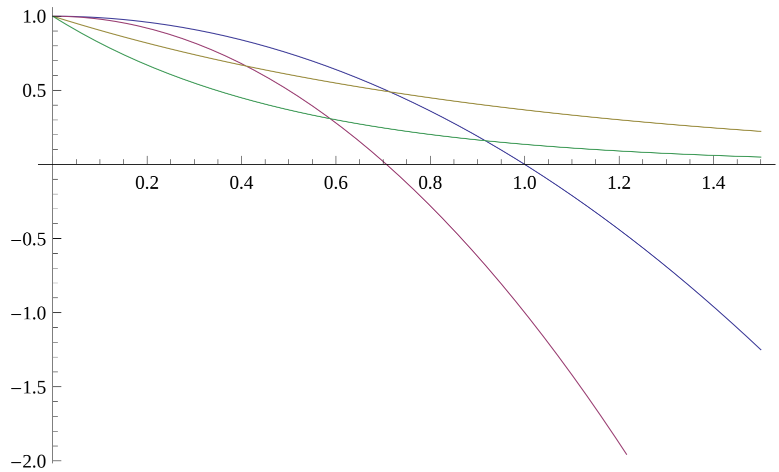

Figura 1: Due curve (24) per vari valori di a e f.

$$\kappa\{-\tilde{D}-\tilde{B}+\tilde{C}\} = \frac{2mf}{\hbar^2}\tilde{D}, \qquad \tilde{B}-\tilde{C} = -(1+\frac{2mf}{\kappa\hbar^2})\tilde{D}. \tag{18}$$

dove

$$\tilde{D} = De^{-\kappa a}, \qquad \tilde{B} = Be^{\kappa a}, \qquad \tilde{C} = Ce^{-\kappa a}. \tag{19}$$

Cioè

$$\tilde{B} = -\frac{mf}{\kappa\hbar^2}\tilde{D}; \qquad \tilde{C} = (1+\frac{mf}{\kappa\hbar})\tilde{D}. \tag{20}$$

Si ha ora

$$\frac{B}{C} = e^{-2\kappa a}\frac{\tilde{B}}{\tilde{C}} = -e^{-2\kappa a}\frac{\frac{mf}{\kappa\hbar^2}}{1+\frac{mf}{\kappa\hbar^2}}. \tag{21}$$

Eliminando B, C (uguagliando le (15), (21)), si trova l'equazione per κ (quindi per l'energia)

$$-e^{-2\kappa a}\frac{\frac{mf}{\kappa\hbar^2}}{1+\frac{mf}{\kappa\hbar^2}} = \frac{1-\frac{mf}{\kappa\hbar^2}}{\frac{mf}{\kappa\hbar^2}} \tag{22}$$

$$e^{-2\kappa a} = -\frac{\kappa^2\hbar^4 - m^2 f^2}{m^2 f^2} = 1 - \frac{\hbar^4}{m^2 f^2}\kappa^2 \tag{23}$$

Le soluzioni sono date dalle intersezioni delle due curve,

$$y = e^{-2\kappa a}, \qquad y = 1 - \frac{\hbar^4}{m^2 f^2}\kappa^2, \tag{24}$$

vedi Fig. 1. Dal grafico si evince che l'equazione (23) ha una soluzione per κ positiva e

$$0 < \kappa < \frac{mf}{\hbar^2}\ , \tag{25}$$

per qualsiasi valori di f, m, a, tranne per $a = 0$. Il sistema dunque ha uno stato legato, finché $a \neq 0$.

Per $a = 0$ la soluzione del sistema di cui sopra corrisponde a $\kappa = 0$: essa non rappresenta uno stato legato, poiché la funzione d'onda è una costante, non normalizzabile.

Questo è perfettamente sensato perché per $a = 0$ il potenziale si annulla, $V = 0$.

Quando a diminuisce adiabaticamente l'energia di legame diventa più piccola, la funzione d'onda sempre più larga. Al momento in cui a diventa esattamente zero la funzione d'onda diventa costante: la particella non è più legata (è in uno stato del continuo, con l'energia zero). D'altronde il potenziale è divenuto nullo.

3

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{\kappa}{2}x^2 + \frac{\kappa}{2}(x-b)^2 = \frac{p^2}{2m} + \kappa(x^2 - bx + \frac{b^2}{2}) \\ &= \frac{p^2}{2m} + \kappa\,[\,(x - \frac{b}{2})^2 + \frac{b^2}{4}\,] = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\tilde{x}^2 + \frac{\kappa b^2}{4} \end{aligned} \tag{26}$$

dove

$$\tilde{x} = x - \frac{b}{2}\,, \qquad \omega = \sqrt{\frac{2\kappa}{m}}\,. \tag{27}$$

Questa è un oscillatore armonico, con il centro di richiamo a $x = \frac{b}{2}$. I livelli di energia sono

$$E_n = \omega\hbar(n + \tfrac{1}{2}) + \frac{\kappa b^2}{4}\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{28}$$

Nello stato fondamentale,

$$\langle x \rangle = \tfrac{b}{2}\,, \qquad \langle p \rangle = 0\;: \tag{29}$$

questi risultati si ottengono dalla simmetria della funzione d'onda, senza calcolo.