Compitino III MQ

17 aprile '15 (A.A. 14/15)

Tempo a disposizione: 2 ore.

Problema 1.

Una particella è legata al potenziale unidimensionale $|x|$: l'Hamiltoniana è data da

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + |x| \,. \tag{1}$$

Per semplicita di scrittura, è stato posto $2m = 1$, $\hbar = 1$. Stimare l'energia dello stato fondamentale col metodo variazionale.

Problema 2.

Un oscillatore bidimensionale,

$$H_0 = \frac{{p_x}^2}{2m} + \frac{{p_y}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \frac{m\omega^2}{2}y^2 \,, \tag{2}$$

è perturbato dal potenziale

$$V = g\,x\,y \,. \tag{3}$$

Determinare le correzioni all'energia del livello $N = 2$ (il secondo livello eccitato), usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine in g.

Problema 3.

L'atomo di idrogeno nello stato fondamentale viene sottoposto, a partire da $t = 0$, al potenziale

$$H' = \hat{F}\, e^{-i\omega t} + h.c., \qquad \hat{F} = \lambda\,(x^2 + y^2 - 2z^2) \,, \tag{4}$$

e ionizza. Calcolare la distribuzione angolare dell'elettrone finale. Qual'è il valore di momento angolare nello stato finale? Determinare la probabilità per intervallo unitario del tempo di transizione. Potete approssimare lo stato finale con $\psi = e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}$.

Formulario:

(i) Oscillatore unidimensionale

$$x_{01} = x_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}; \quad x_{12} = x_{21} = \frac{1}{\alpha}; \quad (x^2)_{00} = \frac{1}{2\alpha^2}; \quad (x^2)_{22} = \frac{5}{2\alpha^2};$$

$$(x^2)_{20} = (x^2)_{02} = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha^2}; \quad (x^2)_{11} = \frac{3}{2\alpha^2}; \qquad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \, .$$

(ii) Un integrale

$$\int d^3r \, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \, e^{-r/r_B} = \frac{8\pi r_B^3}{(1 + p^2 r_B^2/\hbar^2)^2} \, .$$

(iii) Fermi

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |(\hat{F})_{fi}|^2 \rho(E_f) d\Omega, \qquad \rho(E_f) = \frac{m p_f}{(2\pi\hbar)^3} \, .$$

Soluzione

Problema 1.

(i) Se prendiamo (J.J. Sakurai)

$$\psi^{(\alpha)} = \begin{cases} c\,(\alpha - |x|) & -\alpha < x < \alpha, \\ 0 & |x| \geq \alpha, \end{cases} \tag{5}$$

si ha

$$c = (3\alpha^{-3}/2)^{1/2} \,. \tag{6}$$

Si trova per $\langle H \rangle$

$$E^{\alpha} = \langle H \rangle^{\alpha} = \frac{3}{2}(2\alpha^{-2} + \alpha/6). \tag{7}$$

Minimizzazione dà

$$\alpha \simeq 2 \cdot 3^{1/3} \simeq 2.884, \tag{8}$$

perciò

$$E^{(var)} \simeq 1.082 \,. \tag{9}$$

(ii) Con le funzioni Gaussiane,

$$\psi^{(\beta)} = \left(\frac{2\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\beta x^2} \,, \tag{10}$$

si ha

$$\langle H \rangle^{\beta} = \beta + \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \,. \tag{11}$$

Minimizzandola si trova che

$$\beta = (\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}})^{2/3} \simeq 0.3414, \tag{12}$$

e di conseguenza,

$$E^{(var)} \simeq 1.024 \,. \tag{13}$$

(iii) Con le funzioni di prova

$$\psi^{(\alpha)} = \sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha|x|}, \tag{14}$$

si trova

$$\langle H \rangle = \alpha^2 + \frac{1}{2\alpha} \,. \tag{15}$$

La minimizzazione dà

$$\alpha = (1/4)^{1/3} \simeq 0.630 \,, \tag{16}$$

e l'energia

$$E^{(var)} \simeq 1.190 \,. \tag{17}$$

Questi risultati sono da paragonare con il valore numerico dell'energia dello stato fondamentale

$$E_0 \simeq 1.019 \,. \tag{18}$$

Si noti comunque che i risultati ottenuti danno sempre una stima in eccesso, come ci si aspetta.

Problema 2.

Per $N=1$,

$$\Delta E = \pm \frac{g\hbar}{2m\omega} \ . \tag{19}$$

Per $N=2$ ci sono tre stati degeneri, $|1\rangle = (1,1)$, $|2\rangle = (2,0)$, $|3\rangle = (0,2)$. In questi stati,

$$V = \frac{g}{\sqrt{2}\alpha^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{20}$$

Diagonalizzandola si trova

$$\Delta E = 0, \pm \frac{g\hbar}{m\omega} \ . \tag{21}$$

Questi risultati sono consistenti con quanto si ottiene risolvendo esattamente il sistema, con una semplice rotazione delle coordinate,

$$X = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \ ; \quad Y = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \ ; \tag{22}$$

che dimostra che il sistema perturbato è equivalente all'oscillatore anisotropo (per piccolo g),

$$H = \frac{P_X^2}{2m} + \frac{P_Y^2}{2m} + \frac{m\omega^2 + g}{2} X^2 + \frac{m\omega^2 - g}{2} Y^2 \ . \tag{23}$$

Problema 3.

Ponendo $\hbar = r_B = 1$

$$\begin{aligned} V_{fi} &= \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \int d^3r\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \, (x^2+y^2-2z^2)\, e^{-r} \\ &= -\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \Big(\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial p_z^2}\Big) \int d^3r\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}\, e^{-r} \\ &= -\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \Big(\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial p_z^2}\Big) \frac{8\pi}{(1+p^2)^2} \\ &= -192 \frac{\lambda\sqrt{\pi}}{(1+p^2)^4} (p_x^2 + p_y^2 - 2p_z^2) \end{aligned} \tag{24}$$

$$dP = \frac{5}{16\pi} (1 - 3\cos^2\theta)^2 \, d\Omega \ . \tag{25}$$

$$L = 2 \ . \tag{26}$$

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |(\hat{F})_{fi}|^2 \rho(E_f) d\Omega, \qquad \rho(E_f) = \frac{mp_f}{(2\pi\hbar)^3} \ . \tag{27}$$

$$\begin{aligned} w &= 2\pi 2^{12} 3^2 (\lambda\sqrt{\pi})^2 \frac{16\pi}{5} \frac{p^4}{(1+p^2)^8} \frac{mp}{(2\pi)^3} \\ &= C \frac{mp^5}{(1+p^2)^8} \ , \qquad p = \sqrt{2m(\omega - e^2/2)} \ , \end{aligned} \tag{28}$$

$$C = \frac{2^{14}\cdot 3^2}{5} \lambda^2 \ . \tag{29}$$

Volendo si può ripristinare i fattori

$$C = \frac{2^{14} \cdot 3^2}{5} \lambda^2 \frac{r_B^{11}}{\hbar^8} \; ; \tag{30}$$

e con questi fattori, visto che λ ha la dimensione di

$$[\lambda L^2] = [E], \qquad \therefore \quad [\lambda] = \frac{M}{T^2} \; , \tag{31}$$

$$w = C \frac{m p^5}{(1 + p^2 r_B^2/\hbar^2)^8} \; , \qquad p = \sqrt{2m(\omega\hbar - e^2/2r_B)} \tag{32}$$

ha la corretta dimensione

$$[w] = \frac{1}{T} \; . \tag{33}$$