

Meccanica Quantistica

Compitino II

02 febbraio 2017 (A.A. 16/17)

Tempo a disposizione: 2 ore

Problema 1

Si consideri un sistema composto da due spin $1/2$, $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_2$.

(i) Determinare i valori possibili dello spin totale e la sua componente z , $\{S, S_z\}$.

I due spin interagiscono tra di loro e con un campo magnetico esterno costante, con l'Hamiltoniana

$$H = \alpha \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 + (\beta_1 \mathbf{s}_1 + \beta_2 \mathbf{s}_2) \cdot \mathbf{B} \equiv H_1 + H_2. \quad (1)$$

(ii) In assenza del campo magnetico ($\mathbf{B} = 0$), trovare gli autovettori e autovalori di H_1 .

(iii) Con il campo magnetico non nullo, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, calcolare gli elementi di matrice del secondo termine H_2 , tra gli stati di cui al punto (ii), esprimendo il risultato come una matrice 4×4 . Trovare gli autovalori dell'Hamiltoniana totale $H = H_1 + H_2$.

Problema 2

Un atomo di idrogeno si trova in uno stato di $n = 2$.

(i) Qual'è l'energia del livello $n = 2$; qual'è il grado di degenerazione del livello?

Si supponga che l'atomo sia nello stato

$$|J, J_z\rangle = |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle \quad (2)$$

del momento angolare totale, $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{s}$.

(ii) Qual'è il valore del momento angolare orbitale L ?

(iii) Trovare la distribuzione angolare dell'elettrone in questo stato.

Soluzione

Problema 1

(i)

$$\{S, S_z\} = \{1, 1\}, \{1, 0\}, \{1, -1\}, \{0, 0\}. \quad (3)$$

I due spin interagiscono tra di loro e con un campo magnetico esterno costante, con l'Hamiltoniana

$$H = \alpha \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 + (\beta_1 \mathbf{s}_1 + \beta_2 \mathbf{s}_2) \cdot \mathbf{B} \quad (4)$$

(ii) In assenza del campo magnetico ($\mathbf{B} = 0$), trovare gli autovettori e autovalori di H .

$$H_1 = \alpha \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = \frac{\alpha}{2} (S^2 - \frac{3}{2}) = \begin{cases} \frac{\alpha}{4} & S = 1, \\ -\frac{3\alpha}{4} & S = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Gli stati di $S = 1$ sono

$$|1, 1\rangle = |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle; \quad |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle); \quad |1, -1\rangle = |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle; \quad (6)$$

lo stato di singoletto $S = 0$ è

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle). \quad (7)$$

(iii) Con il campo magnetico non nullo, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, calcolare gli elementi di matrice del secondo termine di H tra gli stati di cui al punto (ii), esprimendo il risultato come una matrice 4×4 .

Il secondo termine di H è

$$H_2 = B(\beta_1 s_{1z} + \beta_2 s_{2z}); \quad (8)$$

L'azione di H_2 su vari stati dà:

$$\begin{aligned} H_2 |1, 1\rangle &= \frac{B(\beta_1 + \beta_2)}{2} |1, 1\rangle; \\ H_2 |1, 0\rangle &= B(\beta_1 s_{1z} + \beta_2 s_{2z}) \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle) = \frac{B(\beta_1 - \beta_2)}{2} |0, 0\rangle; \\ H_2 |1, -1\rangle &= -\frac{B(\beta_1 + \beta_2)}{2} |1, -1\rangle; \\ H_2 |0, 0\rangle &= B(\beta_1 s_{1z} + \beta_2 s_{2z}) \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle) = \frac{B(\beta_1 - \beta_2)}{2} |1, 0\rangle; \end{aligned} \quad (9)$$

perciò

$$H_2 = \begin{pmatrix} \frac{B(\beta_1 + \beta_2)}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{B(\beta_1 - \beta_2)}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{B(\beta_1 + \beta_2)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{B(\beta_1 - \beta_2)}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

L'Hamiltoniana totale è:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{4} + \frac{B(\beta_1 + \beta_2)}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{4} & 0 & \frac{B(\beta_1 - \beta_2)}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{4} - \frac{B(\beta_1 + \beta_2)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{B(\beta_1 - \beta_2)}{2} & 0 & -\frac{3\alpha}{4} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Solo gli stati $|1,0\rangle$ e $|0,0\rangle$ si mescolano. Gli autovalori sono

$$E_1 = \frac{\alpha}{4} + \frac{B(\beta_1 + \beta_2)}{2}; \quad E_2 = \frac{\alpha}{4} - \frac{B(\beta_1 + \beta_2)}{2}; \quad E_{3,4} = -\frac{\alpha}{4} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 + B^2(\beta_1 - \beta_2)^2}{4}} \quad (12)$$

Problema 2

(1)

$$E = -\frac{e^2}{8r_B^2}; \quad (13)$$

il grado di degenerazione è $n^2 = 4$. Ovviamente esso diventa 8 se si tiene conto dello spin dell'elettrone; 16 se si considera anche lo spin del protone.

(1) $L = 1$.

(2)

$$\Psi = \sqrt{\frac{1}{3}}Y_{1,1}|\downarrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}Y_{1,0}|\uparrow\rangle \quad (14)$$

$$P d\Omega = \left(\frac{1}{3}|Y_{1,1}|^2 + \frac{2}{3}|Y_{1,0}|^2\right)d\Omega = \frac{1}{8\pi}(1 + 3\cos^2\theta)d\Omega \quad (15)$$