Compitino di Meccanica Quantistica

22 marzo 2013 (A.A. 12/13)

Tempo a disposizione: 2 ore

Problema 1.

(i) Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale,

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \ . \tag{1}$$

Determinare la correzione all'energia dell'n-simo livello, al primo ordine in f

$$V = f x^2 \ , \tag{2}$$

utilizzando la teoria delle perturbazioni.

(ii) Trovare lo spettro del sistema con $H = H_0 + V$ ((1), (2)) esattamente. Paragonare il risultato della teoria delle perturbazioni del punto (i) con il risultato esatto.

(iii) Si consideri ora un oscillatore armonico tridimensionale,

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \mathbf{r}^2}{2} \ , \tag{3}$$

perturbato da

$$V = g x y z^2. \tag{4}$$

Trovare la correzione all'energia del primo livello eccitato, al primo ordine in g.

Problema 2

Un atomo di idrogeno nello stato fondamentale ($n = 1$) è sottoposto ad una perturbazione

$$V = A\,\delta(x - ct)\,\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}, \qquad \mathbf{d} = e\,\mathbf{r}, \quad \mathbf{E} = (0, \mathcal{E}, 0) \ . \tag{5}$$

(c è la velocità della luce; A è una costante con la dimensione di una lunghezza).

(i) Al primo ordine della teoria delle perturbazioni determinare in quali stati eccitati si può trovare l'atomo dopo il passaggio dell'"onda d'urto", Eq.(5).

(ii) Calcolare la relativa probabilità, limitatamente a stati eccitati con $n = 2$.

Potete usare il fatto che

$$\frac{e^2}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137} \tag{6}$$

per analizzare approssimativamente l'elemento di matrice di V sia per il punto (i) che per il punto (ii).

Soluzione

Problema 1.

(i) Al primo ordine

$$\Delta E_n = \langle V \rangle_{nn} = f\, x_{nn}^2 = f\, \frac{1}{\alpha^2}\frac{2n+1}{2} = \frac{f\hbar}{m\omega}\frac{2n+1}{2} \tag{7}$$

(ii)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\,\omega^2 x^2}{2} + f\,x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\,\tilde{\omega}^2 x^2}{2}\ , \tag{8}$$

dove

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 + 2f/m}\ . \tag{9}$$

Questa è un oscillatore armonico con la frequenza $\tilde{\omega}$ con lo spettro

$$\tilde{E}_n = \tilde{\omega}\hbar(n+\frac{1}{2})\ , \tag{10}$$

finché

$$f > -\frac{m\omega^2}{2}\ ; \tag{11}$$

il sistema invece descrive una particella libera per $f = -\frac{m\omega^2}{2}$, con lo spettro

$$E = \frac{p^2}{2m} \geq 0, \qquad -\infty < p < \infty, \tag{12}$$

con una doppia degenerazione per ogni livello con $E > 0$, e infine, il sistema è instabile (non ha lo stato fondamentale) per

$$f < -\frac{m\omega^2}{2}\ . \tag{13}$$

Per f piccolo, più precisamente per

$$|f| < \frac{m\omega^2}{2}\ ; \tag{14}$$

$\tilde{\omega}$ si può sviluppare in potenze di f:

$$\tilde{\omega} = \omega(1 + \frac{f}{m\omega^2} + \ldots) \tag{15}$$

quindi al primo ordine

$$\Delta E \simeq \frac{f\hbar}{m\omega}(n+\frac{1}{2}), \tag{16}$$

in accordo con la teoria delle perturbazioni, (7).

(iii) Al primo livello eccitato, ci sono tre stati,

$$|1\rangle = (1,0,0), \quad |2\rangle = (0,1,0), \quad |3\rangle = (0,0,1). \tag{17}$$

In teoria delle perturbazioni degeneri, costruiamo una matrice

$$\mathbf{V}_{ij} = \langle i|V|j\rangle. \tag{18}$$

Dalla conoscenza degli elementi di matrice dell'oscillatore unidimensionale, è chiaro che gli unici elementi non nulli sono tra $|1\rangle$ e $|2\rangle$, con

$$\mathbf{V}_{12} = \mathbf{V}_{21} = g\, x_{10}\, y_{01}\, (z^2)_{00} = g\, \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\, \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\, \frac{1}{2\alpha^2} = \frac{g}{4} \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^2 \tag{19}$$

Diagonalizzando $\mathbf{V}$ si ha che il primo livelli si divide in tre sottolivelli, con

$$E = \frac{5}{2}\omega\hbar, \quad \frac{5}{2}\omega\hbar \pm \frac{g}{4} \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^2 . \tag{20}$$

Problema 2.

(i) La probabilità è data dalla formula,

$$P_{fi} = \frac{1}{\hbar^2} | \int_0^\infty dt\, V_{fi}(t)\, e^{i\omega_{fi} t} |^2 \tag{21}$$

Sostituendo

$$V = A\, e\, \mathcal{E}\, y\, \delta(x - ct), \tag{22}$$

e integrando in t, si ha

$$P_{fi} = \frac{e^2 A^2 \mathcal{E}^2}{c^2 \hbar^2} \, |\langle n, \ell, m | y\, e^{i\omega_{fi} x/c} | 1, 0, 0 \rangle|^2 . \tag{23}$$

Ora

$$\frac{\omega_{fi} x}{c} = x\, \frac{E_n - E_1}{c\hbar} = \frac{e^2 x}{2c\hbar r_B} (1 - \frac{1}{n^2}), \tag{24}$$

e prendendo $|x| \sim r_B$ e visto che

$$\frac{e^2}{c\hbar} \simeq \frac{1}{137}, \tag{25}$$

possiamo approssimare

$$e^{i\omega_{fi} x/c} \simeq 1. \tag{26}$$

L'elemento di matrice rilevante ora ha la forma semplice

$$\langle n, \ell, m | y | 1, 0, 0 \rangle . \tag{27}$$

Secondo il teorema di Wigner-Eckart soltanto gli stati con $(\ell, m) = (1,1), (1,-1)$ vengono eccitati (con $n \geq 2$ qualsiasi). Anche gli stati del continuo, sempre con $(\ell, m) = (1,1), (1,-1)$, possono essere eccitati.

(ii) Limitandoci ai casi di stati finali con $n = 2$, ci sono due stati possibili, $(n, \ell, m) = (2,1,1)$ e $(2,1,-1)$.

$$\langle 2,1,1 | y | 1,0,0 \rangle = \int dr r^3 R_{2,1}(r) R_{1,0}(r) \int d\phi\, d\cos\theta\, Y_{1,1}^* \sin\theta \sin\phi\, Y_{0,0}; \tag{28}$$

dove

$$\int dr r^3 R_{2,1}(r) R_{1,0}(r) = \frac{128\sqrt{2}}{81\sqrt{3}} = \frac{128\sqrt{2}}{81\sqrt{3}} r_B \,; \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\int d\phi\, d\cos\theta Y_{1,1}^* \sin\theta \sin\phi Y_{0,0} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\int d\phi\, d\cos\theta \sin\theta\, e^{-i\phi}\sin\theta\sin\phi \\ &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\frac{4}{3}(-\pi i) = \frac{i}{\sqrt{6}} \qquad (30)\end{aligned}$$

per cui

$$\langle 2,1,1|y|1,0,0\rangle = i\frac{128}{243}r_B = i\frac{2^7}{3^5}r_B \qquad (31)$$

Perciò

$$P_{(1,0,0)\to(2,1,1)} = \frac{2^{14}}{3^{10}}r_B^2\frac{e^2A^2\mathcal{E}^2}{c^2\hbar^2}\ . \qquad (32)$$

Analogamente,

$$P_{(1,0,0)\to(2,1,-1)} = \frac{2^{14}}{3^{10}}r_B^2\frac{e^2A^2\mathcal{E}^2}{c^2\hbar^2}\ . \qquad (33)$$