

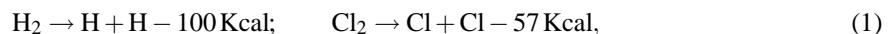
Compitino settimanale I di Meccanica Quantistica

26 ottobre 2012 (A.A. 12/13)

Tempo a disposizione: 1 ora e mezzo.

Problema 1: Abbronzatura

Supponiamo che il fenomeno di abbronzatura sia causato da certe reazioni chimiche, come



etc., dove l'energia richiesta indicata si riferisce a 1 mol ($N_{\text{avog}} \simeq 6 \cdot 10^{23}$), e

$$1 \text{ Kcal} \simeq 4.18 \cdot 10^{10} \text{ erg}.$$

Cercate di trovare una spiegazione del fatto che si abbronzza facilmente in montagne o al mare, ma non con ore di esposizione ad una stufa o un camino di casa. Potete utilizzare i valori numerici,

$$h \simeq 6.63 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec}, \quad \lambda_{UV} \simeq 3 \cdot 10^{-5} \text{ cm}, \quad \lambda_{rosso} \simeq 7 \cdot 10^{-5} \text{ cm}, \quad c \simeq 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}. \quad (2)$$

Problema 2: Sistema a due stati

Un sistema a due stati è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & E_0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Si fanno misure sull'osservabile descritta dall'operatore

$$F = f \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (4)$$

$E_0, \varepsilon > 0, f > 0$, sono costanti. Il sistema si trova nello stato fondamentale a $t < 0$.

- (i) Trovare gli autovalori e gli autostati di H .
- (ii) Si misura F all'istante $t = 0$. Quali sono i risultati possibili e relative probabilità?
- (iii) Supponiamo che la misura di F a $t = 0$ abbia dato il risultato più piccolo fra quelli possibili. Calcolare il valore d'aspettazione per il risultato di una seconda misura di F fatta all'istante $t = T (> 0)$ su questo sistema. Fare uno schizzo di $\langle F \rangle$ come funzione di T .

Risposte

N.B. C'era un piccolo errore nel valore di h nel testo: il valore corretto è

$$h \simeq 6.63 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec}, \quad \text{e non} \quad h \simeq 6.23 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec}. \quad (5)$$

Problema 1.

La soglia di energia richiesta per un processo elementare è, dalla (1),

$$E_{soglia} \simeq 60 \cdot 4.2 \cdot 10^{10} / 6 \cdot 10^{23} \simeq 4.2 \cdot 10^{-12} \text{ erg}. \quad (6)$$

Questa è da paragonare con il tipico valore dell'energia dei fotoni corrispondenti alla luce UV e rosso

$$h\nu_{UV} = hc/\lambda_{UV} = 6.63 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10} / 3 \cdot 10^{-5} = 6.6 \cdot 10^{-12} \text{ erg}; \quad (7)$$

$$h\nu_{rosso} = hc/\lambda_{UV} = 6.63 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10} / 7 \cdot 10^{-5} = 2.8 \cdot 10^{-12} \text{ erg} \quad (8)$$

di cui la stima di $h\nu_{UV}$ è da considerarsi un limite inferiore. Dunque

$$h\nu_{rosso} < E_{soglia} \leq h\nu_{UV}. \quad (9)$$

I quanti di luce UV (ce n'e' un' abbondanza in montagne o al mare) hanno l'energia sufficiente per innescare i processi chimici in questione, mentre quelli delle luci verso rosso - infrarosso dominanti nella stufa o camino sono al di sotto della soglia. L'esposizione a questo tipo di radiazione, *anche per tempo prolungato*, non puo' attivare queste reazioni chimiche, quindi non causa l'abbronzatura.

Osservazioni:

- (i) Come nel caso dell'effetto fotoelettrico, quello che conta è l'energia richiesta per singoli processi elementari e l'energia dei singoli fotoni coinvolti (la lunghezza d'onda o la frequenza della luce) in essi, e non l'energia totale, i.e., l'intensità di luce, il tempo di esposizione, per quante molecole, etc.
- (ii) Logicamente, perciò, non ha molto senso moltiplicare l'energia del singolo fotone per N_{avog} , per ottenere l'energia per 1 mol (anche se matematicamente equivalente!) per paragonare con l'energia di soglia delle reazioni chimiche in questione.
- (iii) Naturalmente non ha senso nemmeno sommare l'energia richiesta per le due reazioni. Ci saranno molte altre reazioni rilevanti per l'abbronzatura. L'importante è osservare che la tipica soglia di energia per singoli processi sia al di sopra dell'energia del quanto della luce rossa - infrarossa. Per quanto riguarda la luce ultravioletta non esiste una precisa definizione, il valore considerata sopra è un limite inferiore.

Problema 2.

- (i) Denotando lo stato fondamentale e lo stato ecitato come $|0\rangle$ e $|e\rangle$ rispettivamente,

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle); \quad |e\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle); \quad (10)$$

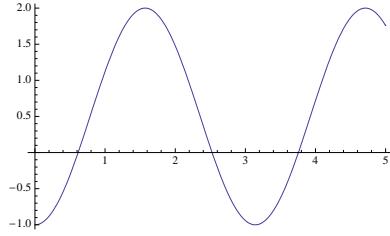


Figura 1:

dove

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

I valori dell'energia sono $E_0 - \varepsilon$, e $E_0 + \varepsilon$, rispettivamente.

(ii) A $t = 0$ il sistema è nello stato fondamentale

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle). \quad (12)$$

I valori possibili di F sono $2f$ e $-f$. La probabilità di trovare il risultato $2f$ è:

$$P_{2f} = |\langle 1|0\rangle|^2 = \frac{1}{2}; \quad (13)$$

analogamente

$$P_{-f} = |\langle 2|0\rangle|^2 = \frac{1}{2}. \quad (14)$$

(iii) Dopo la misura, il sistema si trova nello stato

$$|t = 0\rangle = |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |e\rangle) \quad (15)$$

Lo stato evolve come

$$\begin{aligned} |t = 0\rangle \rightarrow |t\rangle &= \frac{e^{-iE_0 t/\hbar}}{\sqrt{2}} [e^{i\varepsilon t/\hbar}|0\rangle - e^{-i\varepsilon t/\hbar}|e\rangle] \\ &= \frac{e^{-iE_0 t/\hbar}}{2} [e^{i\varepsilon t/\hbar}(|1\rangle + |2\rangle) - e^{-i\varepsilon t/\hbar}(|1\rangle - |2\rangle)] \\ &= e^{-iE_0 t/\hbar} [i \sin \frac{\varepsilon t}{\hbar} |1\rangle + \cos \frac{\varepsilon t}{\hbar} |2\rangle]. \end{aligned} \quad (16)$$

Perciò (Fig. 1)

$$\langle F \rangle = 2f \cdot \sin^2 \frac{\varepsilon t}{\hbar} - f \cdot \cos^2 \frac{\varepsilon t}{\hbar} = f(2 \sin^2 \frac{\varepsilon t}{\hbar} - \cos^2 \frac{\varepsilon t}{\hbar}) = f(3 \sin^2 \frac{\varepsilon t}{\hbar} - 1) \quad (17)$$