

Meccanica Quantistica

Compitino III

11 aprile 2017 (A.A. 16/17)

Tempo a disposizione: 2 ore

Problema 1

Una particella di massa m e spin $\frac{1}{2}$ è descritto dall'Hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + f x s_z . \quad (1)$$

dove f è una costante; $s_3 = \frac{1}{2}\sigma_3$.

- (1) Trovare l'autovalore e l'autostato (o gli autostati) di H_0 , relativo allo stato fondamentale.
- (2) Il sistema è perturbato da un potenziale,

$$V = g s_1 , \quad s_1 = \frac{1}{2}\sigma_1 . \quad (2)$$

Trovare la correzione all'energia dello stato fondamentale in teoria delle perturbazioni al primo ordine in g .

Problema 2

Si considerino gli elementi di matrice dell'operatore del quadrupolo elettrico

$$Q = e(x^2 + y^2 - 2z^2) , \quad (3)$$

tra gli stati $|n, \ell, m\rangle$ dell'atomo di idrogeno,

$$\begin{aligned} A_1 &= \langle 4, 2, -1 | Q | 3, 2, -1 \rangle , \quad A_2 = \langle 3, 2, 1 | Q | 2, 1, 1 \rangle , \quad A_3 = \langle 3, 1, 0 | Q | 3, 1, 0 \rangle , \\ A_4 &= \langle 3, 2, 0 | Q | 2, 1, 0 \rangle , \quad A_5 = \langle 3, 2, 0 | Q | 2, 0, 0 \rangle , \quad A_6 = \langle 3, 1, 1 | Q | 3, 1, 1 \rangle , \\ A_7 &= \langle 3, 1, -1 | Q | 3, 1, -1 \rangle , \quad A_8 = \langle 4, 2, 0 | Q | 3, 2, 0 \rangle , \quad A_9 = \langle 3, 2, 1 | Q | 1, 0, 0 \rangle , \\ A_{10} &= \langle 1, 0, 0 | Q | 1, 0, 0 \rangle , \quad A_{11} = \langle 2, 1, 1 | Q | 2, 1, 1 \rangle , \quad A_{12} = \langle 2, 1, 0 | Q | 2, 1, 0 \rangle , \end{aligned}$$

dove n è il numero quantico principale (radiale).

Rispondere alle seguenti domande senza fare il calcolo esplicito di questi elementi di matrice.

- (i) Dire quali dei $A_1 \sim A_{12}$ sono nulli.
- (ii) Esclusi questi elementi nulli, quanti e quali elementi di matrice ridotti indipendenti descrivono gli altri?
- (iii) Trovare tutte le relazioni tra gli elementi di matrice non nulli, che seguono dal teorema di Wigner-Eckart.

Soluzione

Problema 1

- (1) H_0 commuta con s_z , quindi si possono considerare gli stati in cui s_z è diagonale. Per gli stati con $s_z = +\frac{1}{2}$,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \frac{fx}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(x + \frac{f}{2m\omega^2}\right)^2 - \frac{f^2}{8m\omega^2}; \quad (4)$$

mentre per gli stati di $s_z = -\frac{1}{2}$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - \frac{fx}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(x - \frac{f}{2m\omega^2}\right)^2 - \frac{f^2}{8m\omega^2}. \quad (5)$$

Lo stato fondamentale è doppiamente degenere, con l'energia

$$E_0 = \frac{\omega\hbar}{2} - \frac{f^2}{8m\omega^2}; \quad (6)$$

le funzioni d'onda relative sono date dalla funzione d'onda dell'oscillatore armonico con il centro spostato a $\mp \frac{f}{2m\omega^2}$:

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= \psi_0\left(x + \frac{f}{2m\omega^2}\right)|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} \psi_0\left(x + \frac{f}{2m\omega^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \psi^{(2)} &= \psi_0\left(x - \frac{f}{2m\omega^2}\right)|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_0\left(x - \frac{f}{2m\omega^2}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

- (2) Secondo la teoria delle perturbazioni degenere, la correzione all'energia al primo ordine è data dall'equazione secolare,

$$\det|\mathbf{V} - \lambda\mathbf{1}| = 0, \quad (8)$$

dove $\mathbf{V}$ è la matrice nello spazio degli stati degeneri

$$\mathbf{V}_{ij} = \langle \psi^{(i)} | V | \psi^{(j)} \rangle. \quad (9)$$

Ora

$$\mathbf{V}_{11} = \mathbf{V}_{22} = 0, \quad \mathbf{V}_{12} = \mathbf{V}_{21} = \frac{g}{2}e^{-f^2/4m\omega^3\hbar}. \quad (10)$$

quindi

$$\Delta E = \pm \frac{g}{2}e^{-f^2/4m\omega^3\hbar} \quad (11)$$

Problema 2

L'operatore del quadrupolo elettrico

$$Q = e(x^2 + y^2 - 2z^2), \quad (12)$$

è un tensore sferico del tipo,

$$T_0^2. \quad (13)$$

$$A_1 = \langle 4, 2, -1 | Q | 3, 2, -1 \rangle, \quad A_2 = \langle 3, 2, 1 | Q | 2, 1, 1 \rangle, \quad A_3 = \langle 3, 1, 0 | Q | 3, 1, 0 \rangle.$$

$$\begin{aligned} A_4 &= \langle 3, 2, 0 | Q | 2, 1, 0 \rangle, \quad A_5 = \langle 3, 2, 0 | Q | 2, 0, 0 \rangle, \quad A_6 = \langle 3, 1, 1 | Q | 3, 1, 1 \rangle, \\ A_7 &= \langle 3, 1, -1 | Q | 3, 1, -1 \rangle, \quad A_8 = \langle 4, 2, 0 | Q | 3, 2, 0 \rangle, \quad A_9 = \langle 3, 2, 1 | Q | 1, 0, 0 \rangle, \\ A_{10} &= \langle 1, 0, 0 | Q | 1, 0, 0 \rangle, \quad A_{11} = \langle 2, 1, 1 | Q | 2, 1, 1 \rangle, \quad A_{12} = \langle 2, 1, 0 | Q | 2, 1, 0 \rangle. \end{aligned}$$

(i) A_2 e A_4 sono nulli per parità. A_9 e A_{10} si annullano per Wigner-Eckart (i coefficienti di C-G nulli)

(ii) Gli elementi di matrice ridotti che appaiono sono

$$\langle 4, 2 || T^2 || 3, 2 \rangle, \quad \langle 3, 1 || T^2 || 3, 1 \rangle, \quad \langle 3, 2 || T^2 || 2, 0 \rangle, \quad \langle 2, 1 || T^2 || 2, 1 \rangle : \quad (14)$$

sono quattro.

(iii) Le relazioni non banali sono:

$$\frac{A_1}{A_8} = \frac{\langle 2, -1 | 2, 0; 2, -1 \rangle}{\langle 2, 0 | 2, 0; 2, 0 \rangle} = \frac{-1/\sqrt{14}}{-\sqrt{2/7}} = \frac{1}{2}; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} A_3 : A_6 : A_7 &= \langle 1, 0 | 2, 0; 1, 0 \rangle : \langle 1, 1 | 2, 0; 1, 1 \rangle : \langle 1, -1 | 2, 0; 1, -1 \rangle = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{5}} : \frac{1}{\sqrt{10}} : \frac{1}{\sqrt{10}} = -2 : 1 : 1. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{A_{11}}{A_{12}} = \frac{\langle 1, 1 | 2, 0; 1, 1 \rangle}{\langle 1, 0 | 2, 0; 1, 0 \rangle} = \frac{1/\sqrt{10}}{-\sqrt{2/5}} = -\frac{1}{2}; \quad (17)$$