# Meccanica Quantistica: Recupero Compitino I

*1 febbraio 2016 (A.A. 15/16)*

Tempo a disposizione: 3 ore

## Problema 1

Si consideri una particella che si muove lungo l'asse $x$ nel verso positivo, con numero d'onda $k$, dove $\hbar k = p$. È presente una barriera di potenziale schematizzabile forma

$$V(x) = f\,\delta(x) \tag{1}$$

1) Si calcolino i coefficienti di riflessione e trasmissione attraverso la barriera.

2) Si estenda ora il problema in due dimensioni, la barriera è sempre data dalla (1) ma ora l'onda incide sulla barriera con un angolo di incidenza $\alpha$ rispetto alla normale (asse $x$) cioè l'onda incidente è della forma

$$\psi(x,y) = e^{ik\cos\alpha x + ik\sin\alpha y} = e^{ik\cos\alpha x}e^{ik\sin\alpha y}$$

Si scriva l'onda riflessa e l'onda trasmessa.

## Problema 2

Si consideri una Hamiltoniana di oscillatore armonico bidimensionale

$$H = \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2m}p_y^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) \tag{2}$$

1) Usando la notazione $N = n_x + n_y$, dove $n_x, n_y$ sono i numeri di occupazione per i due oscillatori unidimensionali, si faccia un elenco degli autostati $|n_x, n_y\rangle$ di $H$ per $N \leq 2$ scrivendo accanto la corrispettiva energia.

2) Si consideri l'operatore (generatore infinitesimale delle rotazioni nel piano)

$$L_z = \frac{1}{\hbar}(xp_y - yp_x) = \frac{1}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{3}$$

Si scriva $L_z$ in termini degli operatori di creazione e distruzione dei due oscillatori

$$x = \frac{\ell}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger)\,; \qquad p_x = \frac{1}{i}\frac{m\omega\ell}{\sqrt{2}}(a - a^\dagger) \tag{4}$$

$$y = \frac{\ell}{\sqrt{2}}(b + b^\dagger)\,; \qquad p_y = \frac{1}{i}\frac{m\omega\ell}{\sqrt{2}}(b - b^\dagger) \tag{5}$$

dove

$$\ell \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Allo stesso modo si scriva $H$ in termini di questi operatori e si dimostri che gli operatori commutano fra loro: $[L_z, H] = 0$, usando i noti commutatori tra gli operatori di creazione e distruzione.

3) Si scriva il risultato di $L_z|\alpha\rangle$ per ognuno degli stati scritti nel punto 1).

4) Visto che $L_z$ ed $H$ commutano fra loro devono essere diagonalizzabili simultaneamente. Si scriva per ognuno dei tre sottospazi corrispondenti agli autovalori di $H$ trovati al punto 1) la matrice che rappresenta $L_z$ e la si diagonalizzi trovando gli autovalori.

# Soluzione

# Problema 1

**1)** La funzione d'onda per $x < 0$ e $x > 0$ rispettivamente ha la forma

$$\psi_a(x) = e^{ikx} + R\, e^{-ikx}\,; \qquad \psi_b(x) = T\, e^{ikx}$$

Le condizioni di raccordo sono, ponendo

$$f = \frac{\hbar^2}{m}\beta\,, \quad \beta \equiv \frac{fm}{\hbar^2}\,,$$

$$\psi_a(0) = \psi_b(0)\,; \qquad \frac{\hbar^2}{2m}(\psi_b'(0) - \psi_a'(0)) = \frac{\hbar^2}{m}\beta\psi_a(0)$$

cioè

$$1 + R = T\,; \qquad i\frac{k}{2}(T - (1 - R)) = \beta T$$

da cui

$$R = \frac{\beta}{ik - \beta}\,; \quad T = \frac{k}{k + i\beta}\,. \tag{6}$$

I coefficienti di trasmissione e di riflessione sono dati da:

$$\mathcal{D} = |T|^2 = \frac{k^2}{k^2 + \beta^2}\,; \qquad \mathcal{R} = |R|^2 = \frac{\beta^2}{k^2 + \beta^2}\,; \tag{7}$$

**2)** La parte in $y$ non risente della barriera, quindi l'onda riflessa e l'onda trasmessa sono

$$\psi_R(x,y) = R\, e^{-ikx\cos\alpha + iky\sin\alpha}\,; \qquad \psi_T(x,y) = T\ e^{ikx\cos\alpha + iky\sin\alpha}$$

# Problema 2

**1)**

| | | |
|---|---|---|
| $E_0 = \ \hbar\omega$ | deg. 1 | $\lvert 0,0\rangle$ |
| $E_1 = 2\hbar\omega$ | deg. 2 | $\lvert 1,0\rangle,\ \lvert 0,1\rangle$ |
| $E_2 = 3\hbar\omega$ | deg. 3 | $\lvert 2,0\rangle,\ \lvert 0,2\rangle,\ \lvert 1,1\rangle$ |

**3)** Sostituendo

$$L_z = -i(a^\dagger b - ab^\dagger) \tag{8}$$

e

$$H = \hbar\omega + \hbar\omega(a^\dagger a + b^\dagger b) \tag{9}$$

Effettuando i commutatori si ha

$$[L_z, a^\dagger a] = -i(-a^\dagger b - ab^\dagger)$$
$$[L_z, b^\dagger b] = -i(a^\dagger b + ab^\dagger)$$

quindi

$$[L_z, H] = 0$$

**4)** Ricordando che $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ e $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ si ha subito

$$
\begin{aligned}
&L_z|0,0\rangle = 0\\
&L_z|1,0\rangle = -i(-ab^\dagger)|1,0\rangle = i|0,1\rangle\\
&L_z|0,1\rangle = -i(a^\dagger b)|0,1\rangle = -i|1,0\rangle\\
&L_z|2,0\rangle = -i(-ab^\dagger)|2,0\rangle = i\sqrt{2}|1,1\rangle\\
&L_z|0,2\rangle = -i(a^\dagger b)|0,2\rangle = -i\sqrt{2}|1,1\rangle\\
&L_z|1,1\rangle = -i(a^\dagger b - ab^\dagger)|1,1\rangle = -i\sqrt{2}(|2,0\rangle - |0,2\rangle)
\end{aligned}
$$

**5)**

Nel sottospazio con $E = E_0$ si ha dimensione 1 e l'autovalore $L_z = 0$.

Nel sottospazio $E = E_1$ dai risultati del punto precedente la matrice $L_z$ ha la forma (l'elenco degli stati è quello del punto 2)

$$L_z = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

con autovalori $L_z = \pm 1$.

Nel sottospazio $E = E_2$ la matrice $L_z$ ha la forma

$$L_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i\sqrt{2} \\ 0 & 0 & i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

con autovalori $0, 2, -2$.