

Esercizi 1

Problema 1.

Trovare l'espressione per l'energia del campo elettromagnetico confinato in una scatola con pareti perfettamente riflettente, di lato L :

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{c^2}{4} \mathbf{P}_{(1)}^2 + \mathbf{k}^2 \mathbf{Q}_{(1)}^2 \right) + \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{c^2}{4} \mathbf{P}_{(2)}^2 + \mathbf{k}^2 \mathbf{Q}_{(2)}^2 \right), \quad (1)$$

dove 1 e 2 si riferiscono alle due polarizzazioni, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$,

$$k_x = \frac{\pi n_x}{L}; \quad k_y = \frac{\pi n_y}{L}; \quad k_z = \frac{\pi n_z}{L}; \quad n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (2)$$

Si noti che La Lagrangiana è

$$L = \frac{1}{8\pi} \int_V (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) dv \quad (3)$$

con

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}; \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\phi = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0), \quad (4)$$

Il sistema è messo in una scatola di lato L . Poniamo la condizione al contorno corrispondente alla completa riflessione (il vettore di Poynting è parallelo al muro al bordo):

$$\begin{aligned} A_1(\mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{n}} q_1(\mathbf{n}; t) \sin \frac{\pi n_1 x}{L} \cos \frac{\pi n_2 y}{L} \cos \frac{\pi n_3 z}{L}; \\ A_2(\mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{n}} q_2(\mathbf{n}; t) \cos \frac{\pi n_1 x}{L} \sin \frac{\pi n_2 y}{L} \cos \frac{\pi n_3 z}{L}; \\ A_3(\mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{n}} q_3(\mathbf{n}; t) \cos \frac{\pi n_1 x}{L} \cos \frac{\pi n_2 y}{L} \sin \frac{\pi n_3 z}{L}, \end{aligned} \quad (5)$$

dove $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$; e n_i sono numeri interi non negativi. Inoltre, la condizione di gauge $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ implica

$$\mathbf{q}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (6)$$

Problema 2.

Calcolare $h\nu = \hbar\omega$ dove h ($\hbar = h/2\pi$) è la costante di Planck, ν la frequenza del moto classico dell'elettrone attorno al protone (assumendo un moto circolare a fisso raggio r . Prendere $r = 0.5 \cdot 10^{-8}$ cm). Paragonare il valore di $h\nu$ così ottenuto con kT dove k è la costante di Boltzman, a $T = 273^0$ K e trovare la temperatura T tale che $h\nu \sim kT$.

Problema 3.

Integrare la formula di Planck per trovare la legge di Stefan-Boltzmann, ottenendo il valore numerico della costante di Stefan-Boltzmann.

Problema 4.

L'universo oggi è immerso in una radiazione cosmica (CMB) di temperatura di circa $T \simeq 2.7$ K. Spiegare perché la materia (atomi, molecole, stelle, galassie, etc.) oggi è trasparente rispetto ad essa.

Soluzione

Problema 1.

Il vincolo (6) è risolto con

$$\mathbf{q}(\mathbf{n}) = Q_{1\mathbf{n}}\mathbf{i} + Q_{2\mathbf{n}}\mathbf{j}; \quad \mathbf{n} = n\hat{\mathbf{n}}, \quad (7)$$

dove i vettori unitari $\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ soddisfano

$$\hat{\mathbf{n}} \perp \mathbf{i} = \hat{\mathbf{n}} \perp \mathbf{j} = \mathbf{i} \perp \mathbf{j} = 0; \quad \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}; \quad \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \quad (8)$$

Sostituiamo ora (5) in (3) e in (4) e integriamo in $0 \leq x \leq L : 0 \leq y \leq L; 0 \leq z \leq L :$ le integrazioni sono elementari. Per es.

$$\int_0^L dx \sin^2 \frac{\pi n_1 x}{L} = \int_0^L dx \frac{1 - \cos \frac{2\pi n_1 x}{L}}{2} = \frac{L}{2}, \quad (9)$$

mentre i termini non diagonali si annullano. Il risultato è:

$$L = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{L}{2}\right)^3 \left[\sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{c^2} (\dot{Q}_{1\mathbf{n}}^2 + \dot{Q}_{2\mathbf{n}}^2) - \sum_{\mathbf{n}} \mathbf{k}_{\mathbf{n}}^2 (Q_{1\mathbf{n}}^2 + Q_{2\mathbf{n}}^2) \right], \quad (10)$$

dove $\mathbf{k}_{\mathbf{n}} \equiv \pi \mathbf{n} / L$. Una ridefinizione di $Q_{i\mathbf{n}}$ per una costante moltiplicativa e una successiva trasformazione di Legendre standard danno luogo all'Hamiltoniana, (1).

Problema 2.

$h\nu \simeq 4.7 \cdot 10^{-11}$ erg, vs $kT_0 \simeq 3.8 \cdot 10^{-14}$ erg. $\therefore h\nu \gg kT_0$. I gradi di libertà associati all'elettrone non sono "attivati" alla temperatura ambiente.

$$T \simeq 3.4 \cdot 10^5 \text{ (K)}.$$

Problema 3.

$$\int d\nu u(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 h \int_0^\infty \frac{dx x^3}{e^x - 1} = \sigma T,$$

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{15c^3 \hbar^3} \simeq 7.566 \cdot 10^{-15} \text{ erg } K^{-4} \text{ cm}^{-3}$$

Problema 4.

I fotoni portano energia di circa

$$kT \simeq 1.38 \cdot 10^{-16} \cdot 2.7 \simeq 3.7 \cdot 10^{-16} \text{ erg};$$

da confrontare con l'energia di ionizzazione (e.g.) dell'atomo di idrogeno,

$$\frac{e^2}{2r_B} = 13.6 \text{ eV} \simeq 2.1 \cdot 10^{-11} \text{ erg}.$$