

Esercizi 2

Problema 1.

Le matrici hermitiane

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

sono chiamate *matrici di Pauli*.

i) Verificare i seguenti:

$$\sigma_i^2 = \mathbf{1}; \quad \sigma_i \cdot \sigma_j = i \epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (i \neq j); \quad (2)$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{per } (ijk) = (123) \text{ o permut. pari;} \\ -1 & \text{per } (ijk) = (213) \text{ o permut. dispari di } (123); \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (3)$$

$\{\mathbf{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ insieme forma la base di *quaternioni* (nello stesso senso che $(1, i)$ forma la base di *numeri complessi*.) Dimostrare che una matrice hermitiana 2×2 qualsiasi può essere scritta come una combinazione lineare di $\{\mathbf{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ con coefficienti reali.

ii) Verificare

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k. \quad (4)$$

iii) Trovare gli autovalori e autovettori di $[\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)]$,

$$\mathbf{n} \cdot \sigma = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix}. \quad (5)$$

iv) Un sistema “a due stati” è descritto dall’Hamiltoniana:

$$H = \lambda [\sin \theta \sigma_1 + \cos \theta \sigma_3], \quad \lambda > 0. \quad (6)$$

Determinare gli autovalori e gli autostati dell’energia.

v) Sapendo che il sistema (6) si trova nello stato fondamentale, determinare la probabilità che la misura dell’operatore $O = \sigma_1$ dia il risultato -1 .

Problema 2.

Una particella che si muove in una dimensionale è in uno stato descritto dalla funzione d’onda $\psi(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-ax^2/2}$. ($a > 0$)

Calcolare il valor medio dell’operatore $p^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ in questo stato.

Soluzione

Problema 1.

iii) Gli autovalori sono ± 1 ; gli autostati sono

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}; \quad |-1\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

iv) È un caso particolare di iii) con $\phi = 0$: gli autovalori di H sono $\pm \lambda$. Gli autostati sono

$$|\lambda\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}; \quad |-\lambda\rangle = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

dei quali il secondo è lo stato fondamentale.

v) L'autostato normalizzato dell'operatore σ_1 , corrispondente all'autovalore -1 è

$$|\sigma_1 = -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

La detta probabilità è perciò;

$$|\langle \sigma_1 = -1 | -\lambda \rangle|^2 = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} (1 + \sin \theta). \quad (10)$$

Problema 2.

La funzione d'onda va prima normalizzata correttamente:

$$\psi = \left(\frac{a}{\pi} \right)^{1/4} e^{-ax^2/2}. \quad (11)$$

$$\langle p^2 \rangle = \int dx |p\psi|^2 = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int dx |i\hbar a x e^{-ax^2/2}|^2 = \frac{a^{5/2} \hbar^2}{\sqrt{\pi}} \int dx x^2 e^{-ax^2} = \frac{a\hbar^2}{2}. \quad (12)$$