Esercizi 9

Problema

Una particella di spin 1/2 si muove in una dimensione, con l'Hamiltoniana,

$$H = \frac{1}{2}[\,p^2 + W(x)^2 + \hbar\,\sigma_3 \frac{dW(x)}{dx}\,], \tag{1}$$

dove $p = -i\hbar(d/dx)$; $W(x)$ è una funzione reale, e σ_3 è una matrice di Pauli. Si suppone che $|W| \to \infty$ per $x \to \pm\infty$, per cui lo spettro è puramente discreto.

(i) Per $W(x) = \omega x$, dove ω è una costante reale positiva, si trovi lo spettro, i.e., i livelli energetici e la loro degenerazione.

(ii) Per generico $W(x)$ dimostrare le seguente identità:

$$Q_1^2 = Q_2^2 = H, \tag{2}$$

dove

$$Q_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma_1 p + \sigma_2 W(x)\right); \qquad Q_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma_2 p - \sigma_1 W(x)\right). \tag{3}$$

(iii) Calcolare i seguenti commutatori e "anticommutatori",

$$\begin{aligned}&\{Q_1, Q_2\} \equiv Q_1 Q_2 + Q_2 Q_1; \quad [Q_1, H]; \quad [Q_2, H];\\ &[\sigma_3, H]; \quad [\sigma_3, Q_1]; \quad [\sigma_3, Q_2], \quad \{\sigma_3, Q_1\}; \quad \{\sigma_3, Q_2\},\end{aligned} \tag{4}$$

(iv) Dimostrare che per uno stato qualsiasi vale

$$\langle\psi|H|\psi\rangle \geq 0. \tag{5}$$

Si dimostri dunque che per l'energia dello stato fondamentale vale $E_0 \geq 0$.

(v) Si dimostri che la condizione necessaria e sufficiente per $E_0 = 0$ è che esista una soluzione normalizzabile di

$$p\,\psi_0(x) = -iW(x)\,\sigma_3\,\psi_0(x). \tag{6}$$

Di conseguenza, si dimostri che per $W(x)$ di Fig.1 A esiste uno stato fondamentale con $E_0 = 0$ mentre per $W(x)$ di Fig.1 B non esiste.

(vi) Dimostrare che tutti gli stati con $E \neq 0$ sono doppiamente degeneri, mentre lo stato con $E = 0$ (se esiste) è singolo.

Nota: Q_1, Q_2 sono esempi di operatori di *supersimmetria.* Questo sistema (meccanica quantistica supersimmetrica in una dimensione - Witten (1981)) illustra bene l'uso e la potenza di una simmetria.

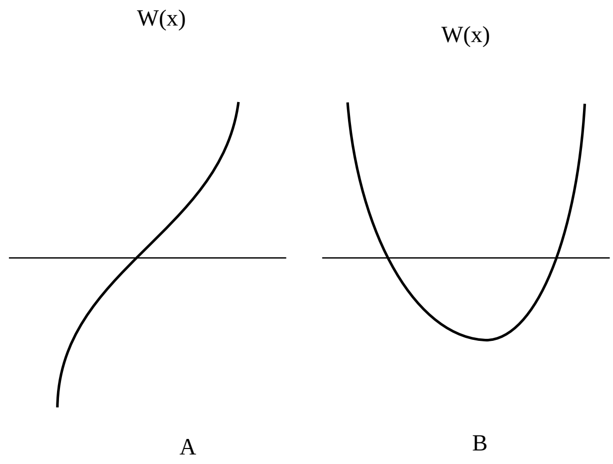

Figure 1: W(x)

Soluzione

Problema

(i) In questo caso

$$H = \frac{1}{2}[\, p^2 + \omega^2\, x^2 + \hbar\, \sigma_3\, \omega\,]. \tag{7}$$

Gli autostati dell'energia possono essere scelti come autostati di σ_3. Ovviamente

$$E_n = \omega\, \hbar\, (n+1), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

per gli stati di spin "up", mentre

$$E_n = \omega\, \hbar\, n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

per gli stati di spin "down". Lo stato fondamentale è perciò

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^{(0)}(x) \end{pmatrix}, \qquad E_0 = 0. \tag{10}$$

Tutti gli stati con $E > 0$ sono doppiamente degenere,

$$\psi_{n,1}, \psi_{n,2} = \begin{pmatrix} \psi^{(n-1)}(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^{(n)}(x) \end{pmatrix}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

con

$$E_n = \omega\, \hbar\, n, \tag{12}$$

dove $\psi^{(n)}(x)$ indica la funzione d'onda dell'n-simo livello dell'oscillatore armonico unidimensionale.

(ii) Per esempio

$$Q_1^2 = \frac{1}{2}[\,p^2 + W^2 + \sigma_1\,\sigma_2\,p\,W + \sigma_2\,\sigma_1\,W\,p\,]. \tag{13}$$

Ma

$$\sigma_1\,\sigma_2 = -\sigma_2\,\sigma_1 = i\,\sigma_3 \tag{14}$$

mentre

$$[\,p, W\,] = -i\hbar W' \tag{15}$$

per cui $Q_1^2 = H$.

(iii)

(iv)

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = ||Q_1|\psi\rangle||^2 \geq 0. \tag{16}$$

Per lo stato fondamentale, $H|\psi_0\rangle = E_0|\psi_0\rangle$, perciò $E_0 \geq 0$. Segue inoltre che

$$E_0 = 0 \tag{17}$$

se e solo se

$$Q_1|\psi_0\rangle = 0. \tag{18}$$

(v) La condizione necessaria e sufficiente per $E_0 = 0$ è quindi che esista una soluzione normalizzabile di

$$Q_1|\psi_0\rangle = 0. \tag{19}$$

Moltiplicando l'equazione con σ_1 da sinistra, questo è equivalente a

$$p\,\psi_0(x) = -iW(x)\,\sigma_3\,\psi_0(x). \tag{20}$$

Questa equazione può essere integrata facilmente:

$$\psi_{(0\uparrow)}(x) = e^{\sigma_3\int_0^x dx\,W(x)/\hbar}\,\psi_{(0\uparrow)}(0) = e^{\int_0^x dx\,W(x)/\hbar}\,\psi_{(0\uparrow)}(0), \tag{21}$$

oppure

$$\psi_{(0\downarrow)}(x) = e^{\sigma_3\int_0^x dx\,W(x)/\hbar}\,\psi_{(0\downarrow)}(0) = e^{-\int_0^x dx\,W(x)/\hbar}\,\psi_{(0\downarrow)}(0), \tag{22}$$

Nel caso di Fig. 1,

$$\int_0^x dx\,W(x) \to \infty, \qquad x \to \pm\infty\,: \tag{23}$$

la funzione d'onda

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{(0\downarrow)}(x) \end{pmatrix} \tag{24}$$

è normalizzabile.

Nel caso di Fig. 2,

$$\int_0^x dx\,W(x) \to \infty, \qquad x \to \infty, \tag{25}$$

$$\int_0^x dx\,W(x) \to -\infty, \qquad x \to -\infty. \tag{26}$$

In questo caso né $\psi_{(0\uparrow)}(x)$ né $\psi_{(0\downarrow)}(x)$ è normalizzabile: non esiste nessun stato fondamentale con $E_0 = 0$. In tal caso, lo stato fondamentale ha $E_0 > 0$, ed è doppiamente degenere (vedi il punto (vi) sotto).

(vi) Supponiamo di prendere l'autostato di H con l'energia E_n come un autostato anche di σ_3 con $\sigma_3 = 1$:

$$H\,|\,n,\uparrow\,\rangle = E_n\,|\,n,\uparrow\,\rangle. \tag{27}$$

Visto che Q_1 commuta con H, lo stato $Q_1|\,n,\uparrow\,\rangle$ è anche esso un autostato di H con lo stesso autovalore, i.e.,

$$H\,[\,Q_1\,|\,n,\uparrow\,\rangle\,] = Q_1\,[\,H\,|\,n,\uparrow\,\rangle\,] = E_n\,[\,Q_1\,|\,n,\uparrow\,\rangle\,]. \tag{28}$$

D'altra parte, poiché Q_1 anticommuta con σ_3, lo stato $Q_1|\,n,\uparrow\,\rangle$ è un autostato di σ_3 ma con l'atovalore -1:

$$\sigma_3\,Q_1\,|\,n,\uparrow\,\rangle = -\,Q_1\,\sigma_3\,|\,n,\uparrow\,\rangle = -\,Q_1\,|\,n,\uparrow\,\rangle. \tag{29}$$

A parte la normalizzazione, perciò, esso è $|\,n,\downarrow\,\rangle$. La normalizzazione è facile da determinare:

$$||Q_1\,|\,n,\uparrow\,\rangle||^2 = \langle\,n,\uparrow\,|Q_1^2|\,n,\uparrow\,\rangle = \langle\,n,\uparrow\,|H|\,n,\uparrow\,\rangle = E_n, \tag{30}$$

dunque

$$Q_1\,|\,n,\uparrow\,\rangle = \pm\sqrt{E_n}\,|\,n,\downarrow\,\rangle. \tag{31}$$

Il segno è convenzionale.

Poiché $Q_1^2 = H$, gli stati $(Q_1)^n\,|\,n,\uparrow\,\rangle$ sono proporzionali o a $|\,n,\uparrow\,\rangle$ o a $|\,n,\downarrow\,\rangle$.

Considerazione dello stato $Q_2|\,n,\uparrow\,\rangle$ porta alla stessa conclusione. Siccome a fisso autovalore di σ_3, il teorema di non degerazione degli autovalori per i sistemi unidimensionali garantisce che l'autostato di H è non degenere, risulta che lo stato $Q_2|\,n,\uparrow\,\rangle$ e $Q_1|\,n,\uparrow\,\rangle$ sono proporzionali.

Tutti gli stati con $E_n \neq 0$ sono dunque doppiamente degeneri.

Infine, per lo stato con $E_0 = 0$, l'azione di $Q_{1,2}$ annichila lo stato $|\,0,\uparrow\,\rangle$ o $|\,0,\downarrow\,\rangle$ (vedi la (31)), uno stato fondamentale con $E_0 = 0$, se esiste, è singolo.

Per la completezza, la discussione sopra può essere fatta alternativamente assumendo che l'autostato dell'energia $|E_n\rangle$ sia un autostato anche di Q_1 (o di Q_2), anziché di σ_3. In questo caso, l'operatore σ_3 trasforma tra i due stati di un dato livello energetico. Lo stato fondamentale singolo, se esiste, è un autostato anche di Q_1 con l'autovalore nullo.