Esercizi Bis 1

ottobre 2014

Moto di una particella libera

1. Dimostrare, per una particella libera,
$$\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle = \frac{1}{m}\langle xp + px\rangle \tag{1}$$
in qualsiasi stato.

2. Dimostrare, per una particella descritta da un pacchetto d'onda reale, $\psi_0(x)$,
$$\langle xp + px\rangle = 0\ . \tag{2}$$

3. Un pacchetto d'onda è descritto dalla funzione d'onda
$$\psi_0(x) = N\, e^{-x^2/d^2}. \tag{3}$$
Calcolate la costante di normalizzazione N.

4. Calcolare
$$\langle x^2\rangle = \langle\psi_0|x^2|\psi_0\rangle, \tag{4}$$
nello stato (3).

5. Determinare la distribuzione di probabilità per vari valori di impulso, p, nello stato descritto dalla (3).

6. Lo stato a $t = 0$, (3), evolve col tempo. Determinare la funzione d'onda a tempo t, $\psi(x,t)$, usando
$$H = \frac{p^2}{2m}\ . \tag{5}$$
Suggerimento: usate lo sviluppo di $\psi_0(x)$ in autostati di p, utilizzato al punto 5, e ricordate che ogni componente evolve
$$a(p)\, e^{ipx/\hbar} \to e^{-iE_pt/\hbar}a(p)\, e^{ipx/\hbar} = e^{-ip^2t/2m\hbar}a(p)\, e^{ipx/\hbar}\ . \tag{6}$$
Risommate in p per trovare la forma di $\psi(x,t)$.

7. Calcolare
$$\langle\psi(t)|x^2|\psi(t)\rangle\ \ : \tag{7}$$
e dimostrare che esso cresce con t. (Proprietà nota come "allargamento del pacchetto d'onda libero").

8. Interpretate questo risultato in termini fisici.

9. Spiegate perché questo risultato non contraddice i punti 1 e 2.