Esercizi 3

Problema 1.

i) Verificare

$$[AB,C] = A[B,C] + [A,C]B, \qquad [A,BC] = B[A,C] + [A,B]C; \tag{1}$$

ii) Calcolare i commutatori,

$$[x^2, p_x], \quad [p_x, V(\mathbf{r})], \quad [xp_y - yp_x, x]. \tag{2}$$

iii) Calcolare i commutatori,

$$[x, p^n], \quad [p, V(x)^n]. \tag{3}$$

(Trucco: $[A,B^n] = AB^n - B^nA = [A,B]B^{n-1} + B[A,B]B^{n-2} + B^2[A,B]B^{n-3} + \ldots + B^{n-1}[A,B]$.)

Problema 2.

Un sistema "a due stati" è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = E_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

In questo sistema si considera la misura di due variabili A e B, descritte dagli operatori

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2}\,i \\ \sqrt{2}\,i & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Gli autovalori e autovettori ortonormali di A sono dati da:

$$|A,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad |A,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \tag{6}$$

come si può facilmente verificare.

(i) Trovare gli autovalori e i rispettivi autovettori di B.

(ii) Dire se le variabili A e B sono compatibili, e se sono conservate.

(iii) Supponiamo che la misura di A abbia dato il risultato $A = 1$. Quali sarebbero i risultati possibili di una misura di B, e quali sarebbero le probabilità rispettive, se questa misura fosse eseguita immediatamente dopo la misura di A?

(iv) Lo stesso sistema è sottoposto ad una seconda misura di A. Quale sarebbe la probabilità di trovare il risultato $A = 1$, nei seguenti casi diversi? (Fig.1)

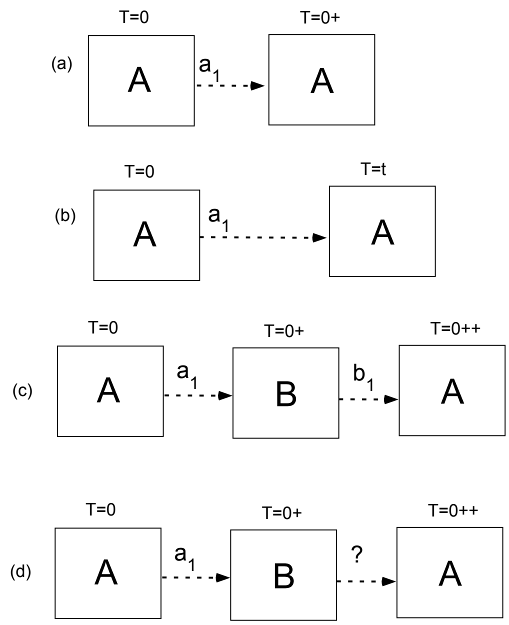

Figura 1:

(a) La misura di B non è fatta, e la seconda misura di A è fatta immediatamente dopo la prima misura di A di cui al punto (iii) ;

(b) La misura di B non è fatta, e la seconda misura di A è fatta dopo un intervallo di tempo (t) rispetto alla prima;

(c) La misura di B è stata eseguita, e l'osservatore di A sa che quest'ultima ha dato come risultato b_1 (l'autovalore più grande di B);

(d) La misura di B è fatta, ma chi misura A (immediatamente dopo la misura di B), non è a conoscenza del risultato di B.

Soluzione

Problema 1.

i)

$$[x^2, p_x] = 2\,i\hbar x, \quad [p_x, V(\mathbf{r})] = -i\hbar\frac{\partial V}{\partial x}, \quad [xp_y - yp_x, x] = i\hbar y. \tag{7}$$

ii) Siccome $[x,p] = i\hbar$ commuta con p, si ha

$$[x, p^n] = i\hbar\, n\, p^{n-1}. \tag{8}$$

Analogamente,

$$[p, V(x)] = -i\hbar V'(x), \tag{9}$$

commuta con $V(x)$ per cui

$$[p, V(x)^n] = -i\hbar n V'(x)\, V(x)^{n-1}. \tag{10}$$

Problema 2.

(i) Gli autovalori B sono $3, 0$. Gli autostati corrispondenti sono:

$$|B,3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\,i \\ 1 \end{pmatrix}; \quad |B,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}\,i \end{pmatrix} \tag{11}$$

(ii) $[A,B] \neq 0$ quindi non sono compatibili. A e B non commutano neanche con H: né A né B è conservato.

(iii) Lo stato dopo la misura di A è

$$|A,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \tag{12}$$

La misura di B darebbe $B = 3$ o $B = 0$, con rispettive probabilità,

$$P(B=3) = |\langle B,3|A,1\rangle|^2 = |\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}|^2 = \frac{3+2\sqrt{2}}{6} \simeq 0.97; \tag{13}$$

$$P(B=0) = |\langle B,0|A,1\rangle|^2 = |\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}|^2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{6} \simeq 0.03. \tag{14}$$

(iv) **(a)** Probabilità 1.

(b) Lo stato evolve come

$$|A,1\rangle \to |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-iE_0t/\hbar} \\ i\, e^{iE_0t/\hbar} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Le probabilità per vari risultati per A sono

$$P(A,1)|_t = |\langle A,1|\psi(t)\rangle|^2 = |\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-iE_0t/\hbar} \\ i\, e^{iE_0t/\hbar} \end{pmatrix}|^2 = \cos^2 \frac{E_0 t}{\hbar}; \tag{16}$$

$$P(A,-1)|_t = |\langle A,-1|\psi(t)\rangle|^2 = |\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-iE_0t/\hbar} \\ i\, e^{iE_0t/\hbar} \end{pmatrix}|^2 = \sin^2 \frac{E_0 t}{\hbar}; \tag{17}$$

(c) Lo stato dopo la misura di B è $|B,3\rangle$. La probabilità richiesta è allora

$$P(A,1)|_{t=0+} = |\langle A,1|B,3\rangle|^2|^2 = |\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\, i \\ 1 \end{pmatrix}|^2 = 0.97; \tag{18}$$

(d) La probabilità per $A = 1$ è in questo caso la somma delle probabilià composte

$$|\langle A,1|B,3\rangle|^2 \cdot P(B,3) + |\langle A,1|B,0\rangle|^2 \cdot P(B,0) = (0.97)^2 + (0.03)^2 \simeq 0.94. \tag{19}$$