Esercizi 4

Problema 1.

Si consideri una particella di massa m che si muove in tre dimensione, vincolata a muoversi liberamente dentro la regione

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c\,. \tag{1}$$

(i) Trovare l'energia e la funzione d'onda relativa di tutt gli stati stazionari.

(ii) Trovare le condizioni (su a, b, c) perché non ci siano degenerazioni di livelli energetici.

(iii) Nel caso $a = b = c$, il sistema possiede molti livelli denegeri. Trovare l'energia del primo livello con il grado di degenerazione 6.

Problema 2.

Una particella descritta dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} - f\,\delta(x), \qquad f > 0, \tag{2}$$

è in uno stato legato, con energia $E_0 < 0$. Come è noto, ponendo

$$\psi(x) = \theta(-x)\,e^{\kappa x} + \theta(x)\,e^{-\kappa x}, \qquad \kappa = \sqrt{\frac{-2mE_0}{\hbar^2}}, \tag{3}$$

e richiedendo che essa soddisfi l'equazione di Schrödinger, si trova che $\kappa = \frac{mf}{\hbar^2}$ e perciò $E_0 = -\frac{mf^2}{2\hbar^2}$.

i) Dire se questo sistema possiede altri stati legati.

ii) All'istante $t = 0$, la buca si sposta all'improvviso, i.e., il potenziale diventa

$$V(x) = -f\,\delta(x - a), \qquad t > 0. \tag{4}$$

Calcolare la probabilità P che la particella rimane legata alla buca, e discutere la dipendenza di P da a.

iii) Successivamente, all'istante $t_0 (> 0)$, il potenziale viene rimosso improvvisamente. La particella che era legata al nuovo potenziale, (4), comincerà a viaggiare liberamente. Calcolare la distribuzione di probabilità per i vari valori dell'impulso.

N.B. la funzione d'onda (3) non è normalizzata.

Problema 3.

Dimostrare la regola di somma

$$\sum_k (E_n - E_k) |\langle \psi_n | x | \psi_k \rangle|^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}, \quad \forall n \ , \tag{5}$$

soddisfatta dagli autovalori di energia $\{E_n\}$ e dagli elementi di matrice dell'operatore $\hat{x}$, in un sistema unidimensionale qualsiasi del tipo

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \ . \tag{6}$$

Nel caso di un oscillatore armonico unidimensionale di massa m, verificare la (5), utilizzando i noti elementi di matrice di x

Soluzione

Problema 1.

(i) Gli stati stazionari si trovano con la separazione delle variabili:

$$\Psi_{n,m,\ell}(\mathbf{r}) = \psi_n(x)\chi_m(y)\phi_\ell(z) \;, \tag{7}$$

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi n x}{a}, \qquad \chi_m = \sqrt{\frac{2}{b}}\sin\frac{\pi m y}{b}, \qquad \phi_\ell = \sqrt{\frac{2}{c}}\sin\frac{\pi \ell z}{c}, \tag{8}$$

con

$$E_{n,m,\ell} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left[\,\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{\ell^2}{c^2}\,\right], \qquad n,m,\ell = 1,2,3,\ldots \;. \tag{9}$$

(ii) La condizione (necessaria) per l'assenza delle degenerazioni è che a, b, c siano relativamente irrazionali i.e., $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ siano tutti numeri irrazionali.

(iii) Per $a = b = c$,

$$E_{n,m,\ell} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}[\,n^2+m^2+\ell^2\,]\,, \qquad n,m,\ell = 1,2,3,\ldots \;. \tag{10}$$

Il primo livello con il grado di degenerazione uguale a 6 sono gli stati $(n,m,\ell) = (1,2,3)$ (o permutazioni), con

$$E = \frac{7\pi^2\hbar^2}{ma^2} \;. \tag{11}$$

Problema 2.

Soltanto i termini $k = n \pm 1$ contribuiscono alla somma. Facendo usi dei noti elementi di matrice di x e $E_k = \omega\hbar(k+\frac{1}{2})$ la formula è facilmente verificata.

Problema 2.

$$\psi(x)' = \kappa\,[\theta(-x)e^{\kappa x} - \theta(x)e^{-\kappa x}], \tag{12}$$

$$\psi(x)'' = \kappa^2\,[\theta(-x)e^{\kappa x} + \theta(x)e^{-\kappa x}] - 2\,\kappa\,\delta(x). \tag{13}$$

Identificando questa con

$$\psi(x)'' = -\frac{2m}{\hbar^2}[E_0 + f\,\delta(x)\,]\psi(x) \tag{14}$$

si trova

$$\kappa = \frac{mf}{\hbar^2}; \qquad E_0 = -\frac{mf^2}{2\hbar^2}. \tag{15}$$

i) No (la normalizzabilità e la continuità a $x = 0$ determinano la funzione d'onda univocamente.)

ii) La funzione d'onda normalizzata è

$$\psi_0(x) = \sqrt{\kappa}\,[\theta(-x)e^{\kappa x} + \theta(x)e^{-\kappa x}], \tag{16}$$

e

$$\psi_0^{'} = \sqrt{\kappa}\,[\theta(-x+a)e^{\kappa(x-a)} + \theta(x-a)e^{-\kappa(x-a)}], \tag{17}$$

prima e dopo il cambiamento del potenziale. Per $a > 0$,

$$\begin{aligned} \langle\psi_0^{'}|\psi_0\rangle &= \kappa\,[\int_{-\infty}^{0} dx\, e^{\kappa x}e^{\kappa(x-a)} + \int_{0}^{a} dx\, e^{-\kappa x}e^{\kappa(x-a)} + \int_{a}^{\infty} dx\, e^{-\kappa x}e^{-\kappa(x-a)}\,] \\ &= e^{-\kappa a}(1+\kappa a). \end{aligned} \tag{18}$$

Per $a < 0$, ripetendo il calcolo, opportunamente cambiando le regioni di integrazioni, si trova

$$\langle\psi_0^{'}|\psi_0\rangle = e^{\kappa a}(1-\kappa a). \tag{19}$$

perciò

$$P = |\langle\psi_0^{'}|\psi_0\rangle|^2 = e^{-2\kappa|a|}\,(1+\kappa|a|)^2. \tag{20}$$

$P = 1$ per $a = 0$, come deve essere, e $P(|a|)$ decresce monotonicamente al crescere di $|a|$.

iii) Calcolo la trasformata di Fourier della (17), spostando $x - a \equiv x^{'}$,

$$\psi_0^{'} = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx'/\hbar} a(p); \tag{21}$$

$$\begin{aligned} a(p) &= \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar}\sqrt{\kappa}\,[\theta(-x)e^{\kappa x} + \theta(x)e^{-\kappa x}] \\ &= \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{2\pi\hbar}}[\int_{-\infty}^{0} dx\, e^{(\kappa - \frac{ip}{\hbar})\,x} + \int_{0}^{\infty} dx\, e^{-(\kappa+\frac{ip}{\hbar})\,x}\,] \\ &= \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{2\pi\hbar}}[\frac{1}{\kappa - \frac{ip}{\hbar}} + \frac{1}{\kappa + \frac{ip}{\hbar}}\,] = \frac{2\kappa^{3/2}\hbar^{3/2}}{\sqrt{2\pi}(p^2 + \kappa^2\hbar^2)} \end{aligned} \tag{22}$$

La distribuzione dell'impulso è:

$$|a(p)|^2 dp = \frac{2\kappa^3\hbar^3}{\pi(p^2+\kappa^2\hbar^2)^2} dp. \tag{23}$$

Visto che

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}, \tag{24}$$

la probablità è correttamente normalizzata:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a(p)|^2 dp = 1. \tag{25}$$