Esercizi 5

Problema 1.

Una particella si muove in un potenziale a “valle”,

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + V(x, y\,), \tag{1}$$

dove

$$V(x, y\,) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, m\, \omega^2 x^2, & 0 \le y \le a; \\ \infty, & y < 0, \quad y > a. \end{cases} \tag{2}$$

i) Determinare i livelli di energia e le funzioni d’onda corrispondenti;

ii) Calcolare il valor medio dell’operatore $\mathbf{p}^2 = p_x^2 + p_y^2$ nello stato fondamentale.

Problema 2.

Una particella di massa m è contenuta in una scatola unidimensionale di lunghezza a e si trova nello stato fondamentale. All’istante $t = 0$ si tolgono istantaneamente le pareti.

i) Determinare la funzione d’onda in rappresentazione degli impulsi a tutti gli istanti successivi a $t = 0$;

ii) Calcolare la probabilità di trovare l’impulso della particella tra p e $p + dp$ a tutti gli istanti successivi a $t = 0$;

iii) Calcolare il valore medio dell’energia a tutti gli istanti successivi a $t = 0$.

Problema 3.

Un elettrone (considerato qui come una particella carica (carica -e) e senza spin) si muove in un piano $x - y$, in campo magnetico costante e uniforme in direzione perpendicolare al piano, $\mathbf{H} = (0, 0, B)$. Studiare lo spettro del sistema, prendendo come potenziale vettoriale,

$$\mathbf{A} = (-B\, y, 0, 0). \tag{3}$$

Soluzione

Problema 1.

i) Separando le variabili

$$\Psi = \psi(x)\phi(y), \tag{4}$$

si hanno gli autovettori,

$$\Psi_{k,\ell} = \psi_k(x)\phi_\ell(y), \tag{5}$$

$$\psi_k(x) = C_k\, H_k(\alpha x)\, e^{-\alpha^2 x^2/2}, \qquad \phi_\ell(y) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{\pi \ell y}{a}), \tag{6}$$

ed i corrispondenti autovalori,

$$E_{m,n} = \omega\hbar\,(k+\frac{1}{2}) + \frac{\pi^2\hbar^2\ell^2}{2\,m\,a^2}, \qquad k = 0,1,2,\ldots, \quad \ell = 1,2,\ldots \tag{7}$$

ii) Conviene calcolare

$$\langle 0,1|\mathbf{p}^2|0,1\rangle = 2m\langle 0,1|\frac{\mathbf{p}^2}{2m}|0,1\rangle = 2m\langle 0,1|H - V(x,y)|0,1\rangle. \tag{8}$$

Ma

$$\langle 0,1|H|0,1\rangle = E_{0,1} = \frac{1}{2}\omega\hbar + \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}; \tag{9}$$

$$\langle 0,1|V(x,y)|0,1\rangle = \langle 0|\frac{1}{2}\,m\,\omega^2 x^2|0\rangle, \tag{10}$$

dove nel secondo membro della (**??**) il bra ed il ket si riferiscono all'oscillatore armonico unidimensionale. Qusto ultimo è dato da

$$\frac{1}{2}\,m\,\omega^2\langle 0|x^2|0\rangle = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2|\langle 1|x|0\rangle|^2 = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\cdot\frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{1}{4}\omega\hbar. \tag{11}$$

$$\therefore \quad \langle 0,1|\mathbf{p}^2|0,1\rangle = 2m\,[\,\frac{1}{2}\omega\hbar + \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} - \frac{1}{4}\omega\hbar] = \frac{m\omega\hbar}{2} + \frac{\pi^2\hbar^2}{a^2}. \tag{12}$$

Problema 2.

i)

$$\psi(x)\begin{cases} = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a} & \text{per} \quad 0 \le x \le a; \\ = 0 & \text{altrove} \end{cases}. \tag{13}$$

La funzione d'onda nella rappresentazione di p (il componente di Fourier) è:

$$\phi(p) = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{a\hbar}}\,\frac{1+e^{-i\,p\,a/\hbar}}{(\frac{\pi}{a})^2 - \frac{p^2}{\hbar^2}}. \tag{14}$$

All'istante t

$$\phi(p,t) = e^{-i\frac{p^2 t}{2m\hbar}}\,\phi(p). \tag{15}$$

ii)

$$d\mathcal{P} = |\phi(p,t)|^2 dp = |\phi(p)|^2 dp = \frac{4\pi a\hbar^3 \cos^2 \frac{pa}{2\hbar}}{(a^2p^2 - \hbar^2\pi^2)^2} dp. \tag{16}$$

$$\int d\mathcal{P} = 4\pi \int dz \, \frac{\cos^2 \frac{z}{2}}{(z^2-\pi^2)^2} = 1. \tag{17}$$

iii)

$$\langle E \rangle = E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}. \tag{18}$$

Problema 3.

L'Hamiltoniana è

$$H = \frac{(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m} = \frac{(p_x - \frac{eB}{c}y)^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m}. \tag{19}$$

Poiché H commuta con p_x, è possibile costruire gli autosati di H ponendo

$$\Psi(x,y) = e^{i\,p\,x/\hbar}\psi(y). \tag{20}$$

$\psi(y)$ soddisfa all'equazione

$$[\,\frac{p_y^2}{2m} + \frac{(\frac{eB}{c}y - p)^2}{2m}\,]\psi(y) = E\psi(y), \tag{21}$$

che è l'equazione di Schrödinger per un oscillatore armonico lineare, con la frequenza di Larmor

$$\omega = \frac{e\,B}{m\,c} \tag{22}$$

e con il centro dell'oscillatore a

$$y = \frac{p\,c}{e\,B}. \tag{23}$$

I livelli dell'energia sono

$$E_n = \omega\hbar(n + \frac{1}{2}) : \tag{24}$$

sono indipendenti da p. Questo significa che ogni livelli n è infinitamente degenere, con valore di p, $-\infty < p < \infty$.

Questi livelli sono noti come *livelli di Landau.*

La frequenza $\omega = \frac{e\,B}{m\,c}$ corrisponde a quella del moto circolare nel caso dell'elettrone classico che entra nel campo magnetico uniforme $\mathbf{H}$,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}. \tag{25}$$

È istruttivo risolvere il problema in un'altra gauge (gauge simmetrica) nella quale

$$\mathbf{A} = (-\frac{B\,y}{2}, \frac{B\,x}{2}, 0). \tag{26}$$