Esercizi 7

Problema 1.

Dovuto alla regola di commutazione non banale

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \tag{1}$$

le variabili J_1, J_2 e J_3 in generale non possono avere valori simultaneamente definiti. Dire se ci sono dei casi (o degli stati quantistici) in cui queste variabili hanno i valori definiti comtemporaneamente.

Problema 2.

Un elettrone è nello stato di spin descritto da

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Qual'è la probabilità, in questo stato, che la misura di s_x dia il risultato $\frac{1}{2}$? Esiste una direzione spaziale $\mathbf{n} = (\theta, \phi)$ tale che la misura di spin $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}$ dia il risultato $\frac{1}{2}$ con certezza? Quale?

Problema 3.

Si consideri un sistema di due spin (ambedue con spin $\frac{1}{2}$), descritto dall'Hamiltoniana

$$\begin{aligned} H &= \kappa\,[\,s_x(1) + s_x(2)\,] + 2\,\lambda\, s_z(1)\, s_z(2) \\ &= \frac{\kappa}{2}\,[\,\sigma_x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \sigma_x\,] + \frac{\lambda}{2}\,\sigma_z \otimes \sigma_z, \end{aligned} \tag{3}$$

dove κ e λ sono costanti reali, σ_i sono matrici di Pauli. Determinare gli autovalori e gli autostati di H.

Problema 4.

La funzione d'onda di una particella, assogettata ad un potenziale $V(r)$ a simmetria centrale è data da:

$$\psi(\mathbf{r}) = (x + 2y - 2z)f(r). \tag{4}$$

i) ψ è un'autofunzione di $\mathbf{L}^2$? Se lo è, con quale valore di ℓ? Altrimenti, quali sono i valori possibili di ℓ?

ii) Determinare le probabilità per i vari valori possibili del numero quantico azimutale m (autovalore di L_z).

Soluzione

Problema 1.

Nel caso (unico) di stati con $J = 0$, tutti i componenti J_i hannno valori definiti

$$J_i|0,0\rangle = 0. \tag{5}$$

(Lo stato è invariante per rotazione tridimensionale).

Problema 2.

$$P = |\langle s_x = \frac{1}{2}|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}\,|\,(1,1)\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}|^2 = \frac{1}{2}\,|\alpha+\beta|^2. \tag{6}$$

Per es. $P = 1$ per $|\psi\rangle = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$; $P = \frac{1}{2}$ per $|\psi\rangle = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$.

Esiste una direzione spaziale $\mathbf{n} = (\theta, \phi)$ tale che la misura di spin $\mathbf{s}\cdot\mathbf{n}$ dia il risultato $\frac{1}{2}$ con certezza? Quale?

Basta che siano soddisfatte

$$\cos\frac{\theta}{2}\,e^{-i\phi/2} = \alpha\,e^{i\,\gamma}; \qquad \sin\frac{\theta}{2}\,e^{i\phi/2} = \beta\,e^{i\,\gamma}. \tag{7}$$

Considerando il rapporto,

$$\tan\frac{\theta}{2} = |\beta/\alpha|; \qquad \theta = 2\,\tan^{-1}|\beta/\alpha|, \qquad \phi = \mathrm{Arg}\,(\beta/\alpha). \tag{8}$$

Problema 3.

Per semplificare le formule redefinisco $\lambda \to 2\,\lambda$ in seguito. Introduco

$$S_i^{tot} = s_i(1) + s_i(2). \tag{9}$$

$$s_z(1)s_z(2) = \frac{(S_z^{(tot)})^2 - (s_z(1))^2 - (s_z(2))^2}{2} = \frac{(S_z^{(tot)})^2}{2} - \frac{1}{4}; \tag{10}$$

$$s_x(1) + s_x(2) = S_x^{(tot)} \tag{11}$$

Conviene quindi scrivere direttamente l'Hamiltoniana nella base di stati di spin totale, $|S, S_z\rangle$,

$$\begin{pmatrix}|1,1\rangle\\ |1,0\rangle\\ |1,-1\rangle\\ |0,0\rangle\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}|\uparrow\uparrow\rangle\\ \frac{|\uparrow\downarrow\rangle+|\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}\\ |\downarrow\downarrow\rangle\\ \frac{|\uparrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \tag{12}$$

anziché scriverlo nella base di stati di singoli spin

$$\begin{pmatrix}|\uparrow\uparrow\rangle\\ |\uparrow\downarrow\rangle\\ |\downarrow\uparrow\rangle\\ |\downarrow\downarrow\rangle\end{pmatrix} \tag{13}$$

e diagonalizzarlo.

Nella base (12)

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\,\lambda\,[\,\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{3\times 3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}] \\
&= \begin{pmatrix} \lambda & \frac{\kappa}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\kappa}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\kappa}{\sqrt{2}} & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{3\times 3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Diagonalizzando la matrice 3×3, si trova lo spettro

$$E = \frac{\lambda}{2}, \quad \pm\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 + 4\kappa^2}, \quad -\frac{\lambda}{2}, \qquad (15)$$

Gli autostati sono (nella base di (12)):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{2}\,\kappa \\ -\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\,\kappa^2} \\ \sqrt{2}\,\kappa \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{2}\,\kappa \\ -\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4\,\kappa^2} \\ \sqrt{2}\,\kappa \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Alternativamente, potremmo lavorare con la base degli stati di singoli spin, (13). Visto che il risultato fisico non dipende dalla scelta del sistema di coordinate, si può prendere gli assi tali che

$$
\begin{aligned}
H &= \kappa\,[\,s_z(1) + s_z(2)\,] + 2\,\lambda\,s_x(1)\,s_x(2) \\
&= \frac{\kappa}{2}\,[\,\sigma_z \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \sigma_z\,] + \frac{\lambda}{2}\,\sigma_x \otimes \sigma_x, \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Allora nella base di stati (13),

$$H = \begin{pmatrix} \kappa & 0 & 0 & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & -\kappa \end{pmatrix} \qquad (18)$$

La matrice ha la forma blocco-diagonale, con sottomatrici 2×2 nelle righe-colonne (1-4) e (2-3). Con la diagonalizzazione della sottomatrice (2-3) si ha

$$E = \pm\frac{\lambda}{2}; \qquad (19)$$

la diagonalizzazione della sottomatrice (1-4) dà:

$$E = \pm\sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \kappa^2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 + 4\,\kappa^2}; \qquad (20)$$

lo spettro è uguale a quello ottenuto nella prima base. Gli autostati (nella base di autostati $s_{1x}s_{2x}$) sono

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ -2\,\kappa + \sqrt{\lambda^2 + 4\kappa^2} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ -2\,\kappa - \sqrt{\lambda^2 + 4\kappa^2} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Lo stato con $E = -\frac{\lambda}{2}$ è lo stato di singoletto di spin anche in questa base. Vedere che gli altri tre stati sono equivalenti a quelli in Eq.(16) è meno banale. Tuttavia, visto che gli autostati di s_{1x} sono

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle); \quad |\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle); \tag{22}$$

il primo stato nella (22) è:

$$\begin{aligned} |\rightarrow\rangle\leftarrow\rangle + |\leftarrow\rangle\rightarrow\rangle &= \frac{1}{2}[\,(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) + (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)\,] \\ &= |\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle, \end{aligned} \tag{23}$$

che è il primo stato di (16). Analogamente si può dimostrare che gli ultimi due stati della (21) sono equivalenti al secondo e al terzo stato della (16).

Problema 4.

i)

$$x = i\,\frac{Y_{1,1} - Y_{1,1}}{\sqrt{2}}\,r; \qquad y = \frac{Y_{1,1} + Y_{1,1}}{\sqrt{2}}\,r; \qquad z = -i\,Y_{1,0}\,r. \tag{24}$$

$$x + 2y - 2z = [\,\frac{2+i}{\sqrt{2}}Y_{1,1} - \frac{2-i}{\sqrt{2}}Y_{1,1} + 2iY_{1,0}\,]\,r; \tag{25}$$

$$\therefore \quad \psi = R(r)[\,\frac{2+i}{\sqrt{2}}Y_{1,1} - \frac{2-i}{\sqrt{2}}Y_{1,-1} + 2iY_{1,0}]. \tag{26}$$

$$\therefore \qquad \ell = 1; \quad m = 1, 0, 1 \tag{27}$$

con probabilità $\frac{5}{18}$, $\frac{4}{9}$ e $\frac{5}{18}$, rispettivamente.