Esercizi 8

Problema 1.

Un sistema di due spin ($s_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = \frac{1}{2}$) è descritto dall'Hamiltoniana,

$$H = \lambda\, \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2. \tag{1}$$

Determinare gli autovalori e le autofunzioni di H.

Problema 2.

Un sistema di due particelle (ambedue di spin $\frac{1}{2}$) è nello stato singoletto di spin totale, $S_{tot} = 0$. Si misurano una componente dello spin 1 lungo la direzione $\mathbf{a}$ e quella dello spin 2 lungo il vettore $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = 1$. Calcolare il valor medio,

$$\langle (\mathbf{a} \cdot \sigma^{(1)})(\mathbf{b} \cdot \sigma^{(2)}) \rangle.$$

Problema 3.

Un sistema analoga a quello del problema 2 ma con spin totale, $S_{tot} = 1, \quad S_{tot,z} = 0:$

(1) Calcolare il valor medio,

$$\langle (\mathbf{a} \cdot \sigma^{(1)})(\mathbf{b} \cdot \sigma^{(2)}) \rangle.$$

(2) Supponiamo invece che l'osservatore sia in grado di misurare soltanto lo spin 1. Spiegare che in questo caso la particella 1 appare come stato misto. Calcolare la matrice densità.

Problema 4.

Una particella A di spin $\frac{3}{2}$ e parità intrinseca $(+)$, nello stato $|S, S_z\rangle = |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, a riposo decade spontaneamente in due particelle B e C, di spin-parità $(1/2)^+$ e $(0)^-$ rispettivamente. Nel decadimento sia il momento angolare che la parità sono conservati.

i) Dire qual'è il valore di ℓ, dove ℓ è il momento angolare orbitale del moto relativo tra B e C.

ii) Esprimere la funzione d'onda dello stato finale in termini di funzioini armoniche sferiche, di funzioni di spin di B e di una funzione radiale.

iii) Determinare la distribuzione angolare della particella C (nel sistema di centro di massa di B e C).

iv) Si misura la componente s_z dello spin di B, con un apparecchio à la Stern-Gerlach, posto nella direzione (θ, ϕ). Dire qual'è la probablità che lo spin risulti "up".

Soluzione

Problema 1.

$$\lambda\,\mathbf{s_1}\cdot\mathbf{s_2} = \frac{\lambda}{2}\,[\,\mathbf{S}_{tot}^2 - \mathbf{s}_1^2 - \mathbf{s}_2^2\,] = \frac{\lambda}{2}\,[\,\mathbf{S}_{tot}^2 - \frac{3}{2}\,] = \begin{cases} \frac{\lambda}{4}, & S_{tot}=1, \\ -\frac{3\,\lambda}{4}, & S_{tot}=0. \end{cases} \tag{2}$$

Problema 2.

Metodo brutale:

$$\langle(\mathbf{a}\cdot\sigma^{(1)})(\mathbf{b}\cdot\sigma^{(2)})\rangle = \langle\frac{\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow}{\sqrt{2}}|\begin{pmatrix} a_3 & a_1-ia_2 \\ a_1+ia_2 & -a_3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} b_3 & b_1-ib_2 \\ b_1+ib_2 & -b_3\end{pmatrix}|\frac{\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow}{\sqrt{2}}\rangle \tag{3}$$

Calcolatelo esplicitamente come e.g.

$$\begin{aligned} &\langle\uparrow\downarrow|\begin{pmatrix} a_3 & a_1-ia_2 \\ a_1+ia_2 & -a_3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} b_3 & b_1-ib_2 \\ b_1+ib_2 & -b_3\end{pmatrix}||\uparrow\downarrow\rangle \\ = &\langle\uparrow|\begin{pmatrix} a_3 & a_1-ia_2 \\ a_1+ia_2 & -a_3\end{pmatrix}|\uparrow\rangle\cdot\langle\downarrow|\begin{pmatrix} b_3 & b_1-ib_2 \\ b_1+ib_2 & -b_3\end{pmatrix}|\downarrow\rangle = -a_3b_3, \end{aligned} \tag{4}$$

etc. Il risultato è: $-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

Metodo elegante: Visto che lo stato è singoletto, $(\mathbf{s}_1+\mathbf{s}_2)|\rangle = 0$,

$$\begin{aligned} &\langle(\mathbf{a}\cdot\sigma^{(1)})(\mathbf{b}\cdot\sigma^{(2)})\rangle = -\langle(\mathbf{a}\cdot\sigma^{(1)})(\mathbf{b}\cdot\sigma^{(1)})\rangle = -a_ib_j\,\langle\sigma_i^{(1)}\sigma_j^{(1)}\rangle \\ = &-\frac{a_ib_j}{2}\langle[\sigma_i^{(1)}\sigma_j^{(1)} + (j\leftrightarrow i)]\rangle = -\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\,\langle\mathbf{1}\rangle = -\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}. \end{aligned} \tag{5}$$

Problema 3.

i) Il metodo brutale dà: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2a_3b_3$.

Metodo elegante?

ii)

$$\langle O^{(1)}\rangle = \langle\frac{\uparrow\downarrow+\downarrow\uparrow}{\sqrt{2}}|O^{(1)}|\frac{\uparrow\downarrow+\downarrow\uparrow}{\sqrt{2}}\rangle = \frac{1}{2}[\,\langle\uparrow|O^{(1)}|\uparrow\rangle + \langle\downarrow|O^{(1)}|\downarrow\rangle] = \mathrm{Tr}\{O^{(1)}\rho\}; \tag{6}$$

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}; \qquad \rho^2 \neq \rho. \tag{7}$$

Problema 4.

i) La conservazione della parità dà

$$+1 = (+1)(-1)(-)^{\ell}, \tag{8}$$

i.e. ℓ deve essere dispari. La conservazione del momentop angolare comporta:

$$\ell = 1,\ 2. \tag{9}$$

Perciò $\ell = 1$.

ii) Dalla tabella di coefficienti di Clebsch-Gordan,

$$|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1,1\rangle|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0\rangle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \tag{10}$$

i.e.,

$$\psi(\mathbf{r}) = R(r)\,[\,\frac{1}{\sqrt{3}}Y_{1,1}(\theta,\phi)|\downarrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}Y_{1,0}(\theta,\phi)|\uparrow\rangle\,]. \tag{11}$$

iii)

$$Y_{1,1} = -i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\,e^{i\phi}, \quad Y_{1,0} = i\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \tag{12}$$

$$\therefore \qquad |\psi|^2 d\Omega = [\,\frac{1}{3}|Y_{1,1}(\theta,\phi)|^2 + \frac{2}{3}|Y_{1,0}(\theta,\phi)|^2\,]\,d\Omega = \frac{1+3\,\cos^2\theta}{8\pi}d\phi\,\sin\theta\,d\theta. \tag{13}$$

Si noti che

$$\int|\psi|^2 d\Omega = 2\pi\int\frac{1+3\,\cos^2\theta}{8\pi}\,\sin\theta\,d\theta = 1. \tag{14}$$

iv) Alla direzione (θ,ϕ) la funzione d'onda *di spin* normalizzata è

$$\mathcal{N}\,[\,Y_{1,1}(\theta,\phi)|\downarrow\rangle + \sqrt{2}Y_{1,0}(\theta,\phi)|\uparrow\rangle\,] = \frac{Y_{1,1}(\theta,\phi)|\downarrow\rangle + \sqrt{2}Y_{1,0}(\theta,\phi)|\uparrow\rangle}{\sqrt{|Y_{1,1}|^2+2|Y_{1,0}|^2}} \tag{15}$$

$$P_\uparrow = \frac{2|Y_{1,0}|^2}{|Y_{1,1}|^2+2|Y_{1,0}|^2} = \frac{4\,\cos^2\theta}{\sin^2\theta+4\,\cos^2\theta} = \frac{4\,\cos^2\theta}{1+3\,\cos^2\theta}; \tag{16}$$

$$P_\downarrow = \frac{|Y_{1,1}|^2}{|Y_{1,1}|^2+2|Y_{1,0}|^2} = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+4\,\cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1+3\,\cos^2\theta}. \tag{17}$$