

Last lecture on MQ. 23/05/2017

Quantum Entanglement / "Problema della Misura e oltre."

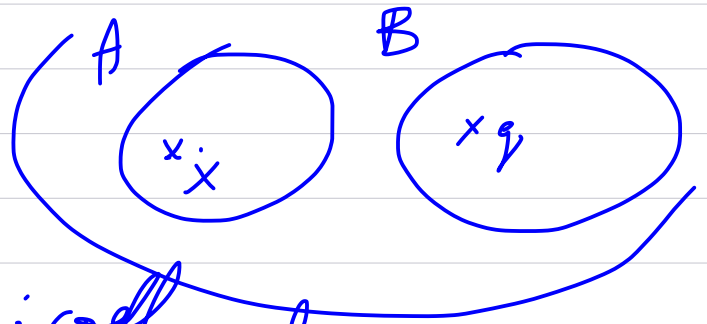
- (1) Da EPR a Bell, CHSH.
- (2) Esperimenti di Aspect.
- (3) Mermin; $PVM \Rightarrow POVM$; Kochen-Specker.
- (4) Entanglement vs Fattorizzazione ~~Entanglement entropy~~
- (5) Misura come processo fisico: decoerenza e il limite classico
- (6) Gatto di Schrödinger.
- (7) ?

Einstein-Podolsky-Rosen - "paradosso" ("Effetto") EPR

$$\Psi = \sum \psi_n(x) \phi_n(y) \quad (*)$$

Per es. $\hat{F} \psi_n = f_n \psi_n$.

(*) Ψ è generale. $\hat{F} \psi_n = f_n \psi_n$ sviluppo
 Ma può essere che $\hat{G} \phi_n = g_n \phi_n$ anche.



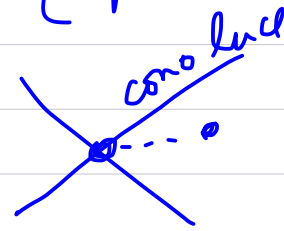
La misura di $\hat{F} \rightarrow F = f_n$ implica

$G = g_n$ immediatamente dopo. Se
 i sistemi A e B sono lontani, le misure
 di F e G sono ^{due} eventi in due punti separati (*)
 da $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 - x_2)^0 (x_1 - x_2)^n < 0$ (space-like)

$\Rightarrow$ La determinazione di $G = g_n$

Contraddice causalità; $\text{con } P_n = 1$

$\Rightarrow$ Se si conosce il risultato della



misura $G = g_n$, prima di eseguirla,
 sarebbe contro la legge di MQ. ($G = g_m$, $P_m = \|\psi_m\|^2$ con prob.)

Paradosso ??

(*) Esp. A non può influenzare il risultato
 della misura in B.

(*) $\Rightarrow$

Risultato: Così come la misura di F non può dinamicamente influenzare la misura di G , neanche l'informazione sul risultato della misura non può arrivare al sito dell'esp. di G immediatamente dopo. Perciò è falsa l'affermazione che la persona che misura G "sa" il risultato della misura "istantaneamente dopo quella di F ", prima dello stesso.

(In relatività speciale, il concetto di simultaneità dipende dal sistema di riferimento!)

Al sito B , non conoscendo il risultato di A

$$\rightarrow G = g_n \text{ con } P_n = \|\psi_n\|^2, \text{ ok con MQ.}$$

La correlazione perfetta

A $f_1, f_2, \dots, f_{29}, \dots$

B $g_1, g_2, \dots, g_{29}, \dots$

può essere verificata a posteriori, portando le registrazioni in un luogo comune.

Esempio d (*)

$$\psi^{EPR}(x, y) = \int dt e^{ip(x-y+x_0)/\hbar} = 2\pi\hbar \delta(x-y+x_0)$$

$$\begin{cases} x_{rel} \equiv x-y, & x_{cm} \equiv (x+y)/2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{rel} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_{rel}} & ; & p_{cm} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_{cm}}. \end{cases}$$

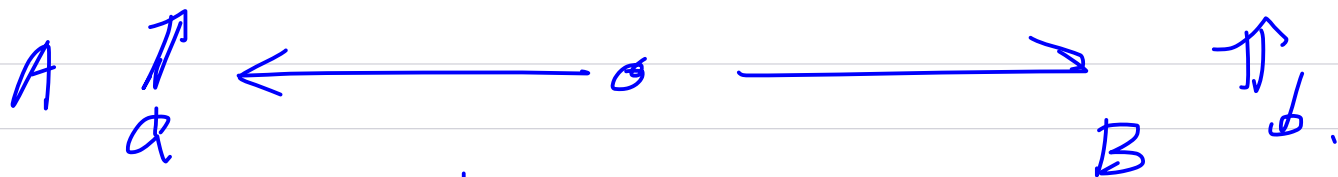
$$p_{cm} \psi^{EPR} = 0 \quad \therefore \quad p_{cm} = 0.$$

La misura di x $\xRightarrow{\text{immediata}}$ $y = x + x_0$!

La misura di $p_a \Rightarrow p_b = -p_a$!

Esempio di Bohm. (*) Due spin $1/2$, $S_{tot} = 0$.

$$\Psi = \frac{\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow}{\sqrt{2}} \psi_{rel}^{(1)}$$



Misure contemporanee di

$$S_1 \cdot a = \frac{1}{2} \sigma_1 \cdot a \quad \& \quad S_2 \cdot b = \frac{1}{2} \sigma_2 \cdot b$$

Argomentazione a' l' EPR

		1	2	3	4	...
$a=b$	A $\sigma_1 \cdot a$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	...
	B $\sigma_2 \cdot a$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	...

Le misure di $\sigma_1 \cdot a$ e $\sigma_2 \cdot b$ perfettamente correlate
 $\rightarrow$ "paradosso"

$a \neq b$	A $\sigma_1 \cdot a$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	...	?
	B $\sigma_2 \cdot b$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	...	?

La correlazione non ovvia.

MQ $\Rightarrow$ predizioni statistiche:

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \cdot \vec{b} & \quad \overline{(\sigma_1 \cdot \vec{a})(\sigma_2 \cdot \vec{b})} = \langle \psi | (\sigma_1 \cdot \vec{a})(\sigma_2 \cdot \vec{b}) | \psi \rangle \\
 & = -\vec{a} \cdot \vec{b} = -\cos \theta
 \end{aligned}$$

EPR: se il risultato di una misura è "nota" a priori, lo "stats" aveva questa proprietà (per es. $\sigma_1 \cdot \sigma_2 = -1$) prima che sia fatta la misura. $\rightarrow$ la natura statistica delle prediz. i MQ $\Leftrightarrow$ Ignoranza sullo "stats" "completo" {variabili nascoste} $\sim$ {1}.

PK)d1 $\sim$ Distribuzione prob. (classica) di cui non abbiamo conoscenza $\rightarrow$

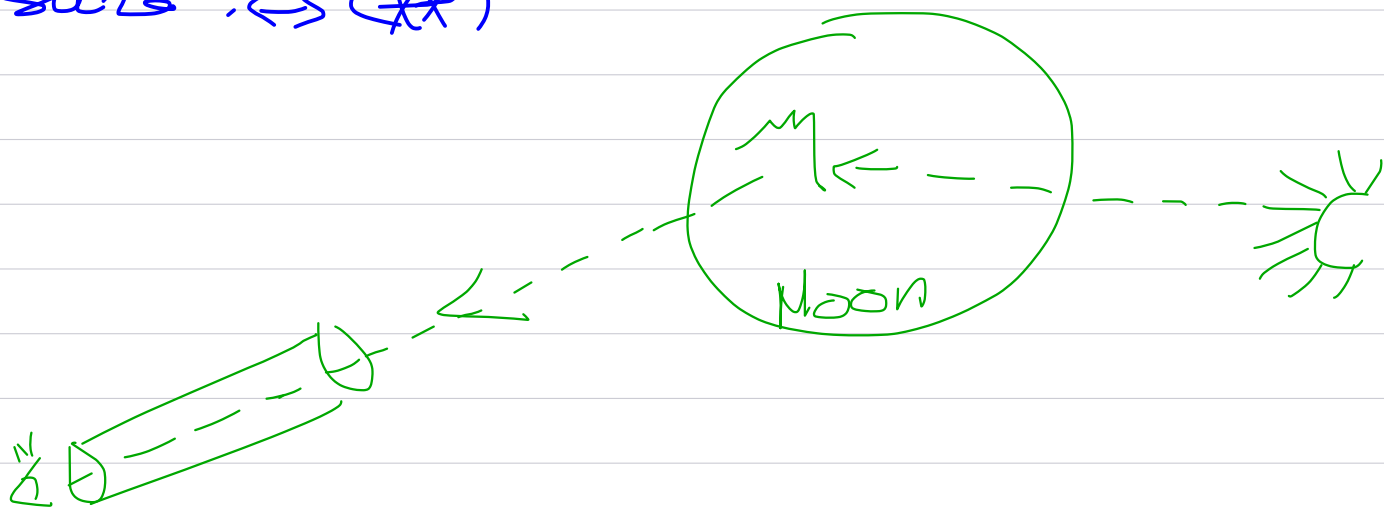
{1} $\Rightarrow$ il risultato univoco in qualsiasi esperimento.

sperimentale
Bell: confronto tra le predizioni d. MQ e le prediz. teorie con "variabili nascoste" che dovrebbero essere teorie "più complete".

J.S. Bell propone il divieto di utilizzo della parola
"measurement" nella discussione degli
aspetti fondamentali della MQ *). Di usare
"experiment" invece.
Pera: "intervention" }

N.B. L'osservazione di Galileo della
superficie della Luna **)

*) "measurement" implicitamente assume che
l'osservazione ha l'unico scopo di andare a
scoprire quello che c'è già, indipendentemente
dalla misura. $\Leftrightarrow$ (**)



Disuguaglianza di Bell. / CHSH.

$a \nearrow \longleftarrow \cdot \longrightarrow \nwarrow b$.

In teoria con variabili nascoste, $\{\lambda\}$.

$$F(a, b) \equiv \overline{R_A(a) R_B(b)}$$

$$\left. \begin{aligned} R_A(a, \lambda) &= \pm 1, \quad R_B(b, \lambda) = \pm 1 \\ R_B(a, \lambda) &= -R_A(a, \lambda) \end{aligned} \right\} (*)$$

$$F(a, b) = \int d\lambda P(\lambda) R_A(a, \lambda) R_B(b, \lambda)$$

$$\text{con } P(\lambda) \geq 0. \Rightarrow F(a, a) = -1 \text{ OK.}$$

$$(*) |F(a, b) - F(a, c)| \leq 1 + F(b, c)$$

(Bell, 1960) valida in una teo. con variabili nascoste qualsiasi.

MQ lo viola per certe a, b, c .

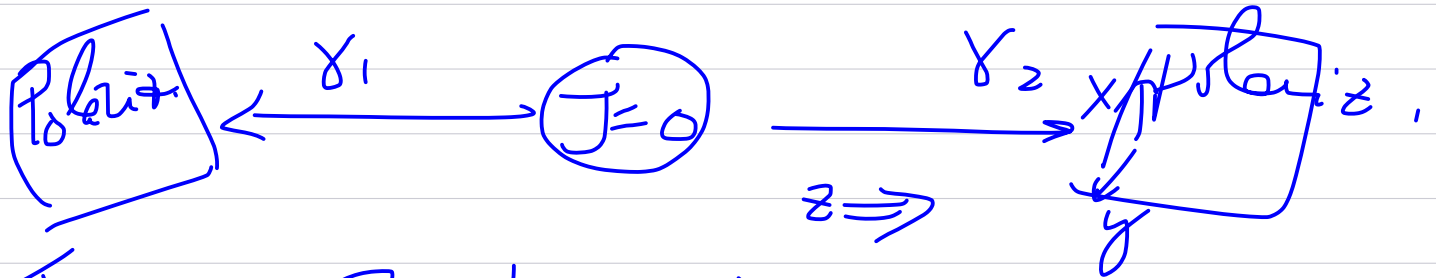
$$(MQ, \text{ LHS} \simeq |b - c|; \text{ RHS} \simeq |b - c|^2 \\ b \sim c \neq a)$$

Dimostrazione della disuguaglianza di Bell.

$$\begin{aligned} |F(a,b) - F(a,c)| &= \left| \int d\lambda P(\lambda) R_A(a,\lambda) (R_B(b,\lambda) - R_B(c,\lambda)) \right| \\ &= \left| \int d\lambda P(\lambda) R_A(a,\lambda) R_B(b,\lambda) [1 - R_A(b,\lambda) R_A(c,\lambda)] \right| \\ &\leq \left| \int d\lambda P(\lambda) [1 - R_A(b,\lambda) R_A(c,\lambda)] \right| \\ &= |1 + F(b,c)| \end{aligned}$$

Una coppia di fotoni con $J_{tot} = 0$ Correlata S-P-S

$$|J=0\rangle \xrightarrow{\gamma_1} |J=1\rangle \xrightarrow{\gamma_2} |J=0\rangle$$



$$J_{tot} = 0 + \text{Parita} \Rightarrow$$

$$|\psi\rangle = \frac{|x\rangle \otimes |x\rangle + |y\rangle \otimes |y\rangle}{\sqrt{2}}$$

Misura di polarizzazione

$$P_1 = |x\rangle\langle x| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; P_2 = |y\rangle\langle y| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Polarizz. in direzione $\hat{e} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$

$$P_\theta = (|x\rangle\cos\theta + |y\rangle\sin\theta)(\langle x|\cos\theta + \langle y|\sin\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\circ \Sigma(\theta) = 2P_\theta - 1 = \pm 1$$

Correlation $F(\theta, \theta') \equiv F_{a,b} = \overline{R(\Sigma_\theta) R(\Sigma_{\theta'})}$

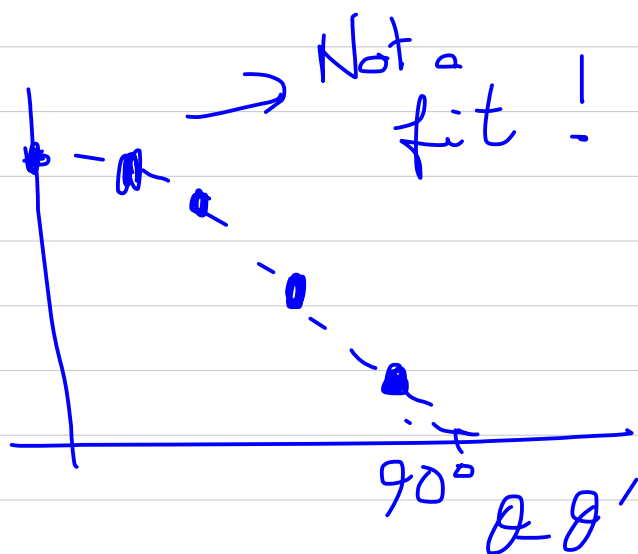
$$F(\theta, \theta') = \langle \Psi | \Sigma_\theta \otimes \Sigma_{\theta'} | \Psi \rangle = \cos 2(\theta - \theta') \quad (*)$$

Var. nasc. $F(\theta, \theta') \Rightarrow S = \frac{1}{4}(F_{a,b} - F_{a,b'} + F_{a',b} + F_{a',b'} - 2) \Rightarrow$
 $-1 \leq S \leq 0 \Rightarrow \text{Esp. (Aspect)}$

Dati sperimentali di Aspect et al.

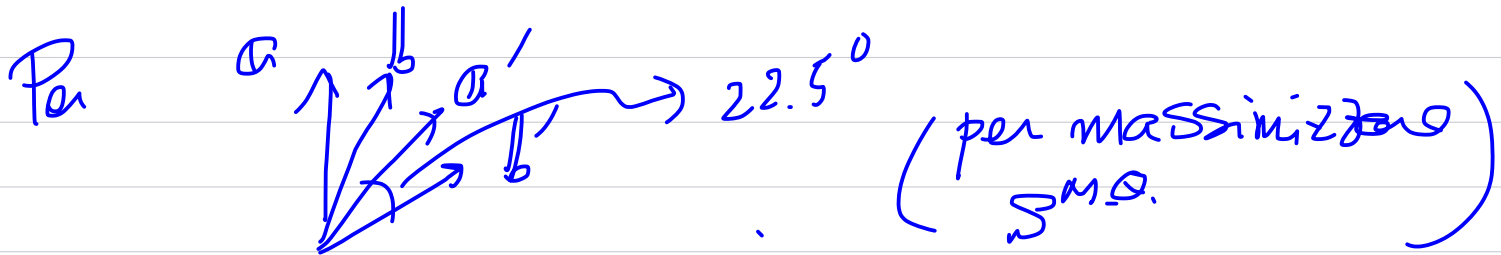
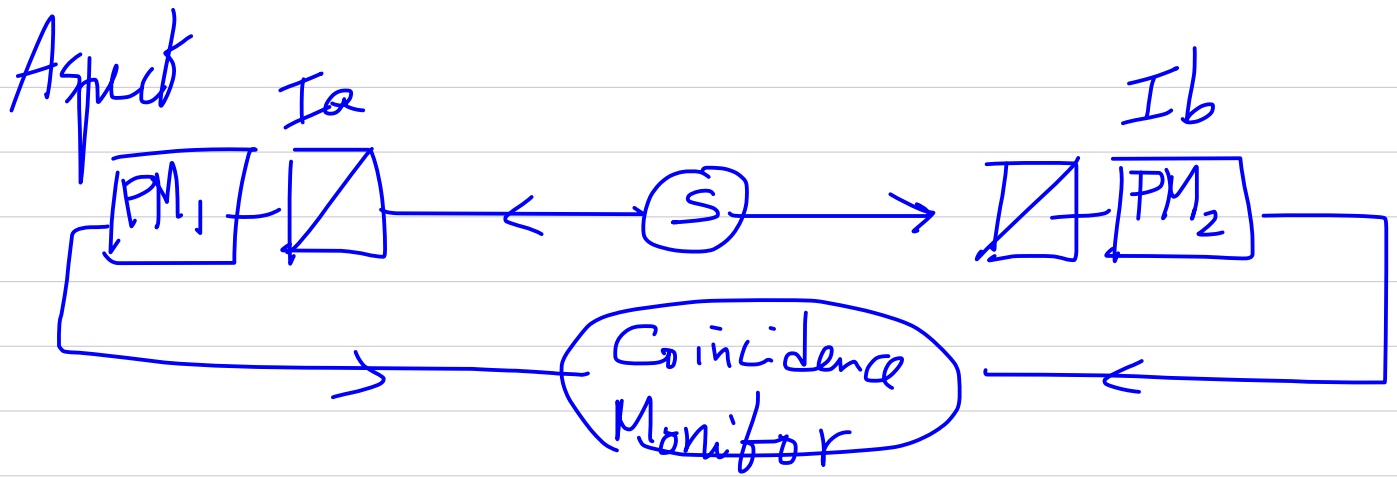
- Verifica di (*)

OK or MQ



- Delayed-choice experiment:
l'interruttore I_a, I_b per determinare le assi
di polarizzazione A e B alternate
con $\Delta t \sim 10 \text{ ns} \ll 40 \text{ ns}$ (tempo volo)
($\Delta t^{\text{SPS}} \sim 5 \text{ ns}$)

La direzione di polarimetri non è ancora
decisa quando la coppia dei fotoni sono
nati e cominciano a viaggiare!



$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S^{M.Q.} = 0.112 \\ S^{exp} = 0.101 \pm 0.020 \text{ (Aspect et al)} \\ -1 \leq S^{CHSH} \leq 0 \end{array} \right.$$

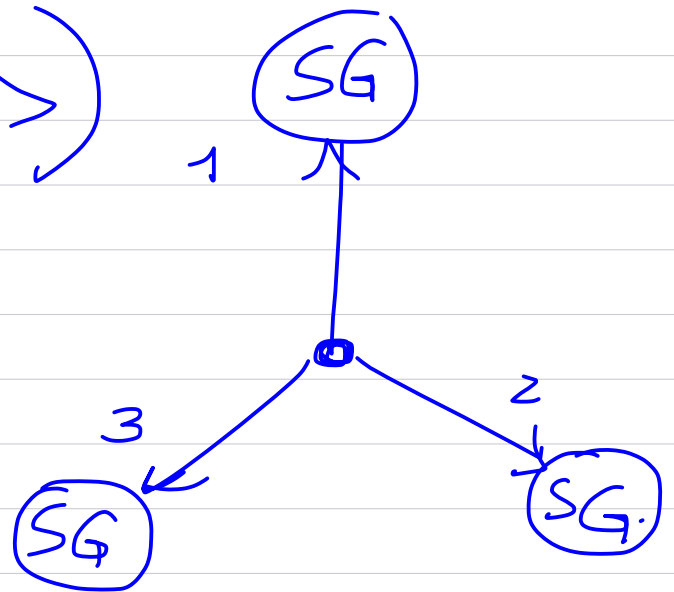
- Esperienza conferma MQ
- " esclude teorie con variabili nascoste !!

Morale: • Indip. da dettagli, le teo. var. nascoste non possono simulare le prediz. MQ in tutte le situazioni.

- L'esperienza esclude teo. var. nascoste.

Mermin (1 singolo esperimento per escludere
la tes. variabile nascosta/MQ ?)

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle)$$



$$M_1 = \sigma_{1x} \sigma_{2y} \sigma_{3y}$$

$$M_2 = \sigma_{1y} \sigma_{2x} \sigma_{3y}$$

$$M_3 = \sigma_{1y} \sigma_{2y} \sigma_{3x}$$

$$M_4 = \sigma_{1x} \sigma_{2x} \sigma_{3x}$$

$$\Rightarrow M_1|\Psi\rangle = |\Psi\rangle, M_2|\Psi\rangle = |\Psi\rangle, M_3|\Psi\rangle = |\Psi\rangle, M_4|\Psi\rangle = -|\Psi\rangle.$$

$\Psi_1 \sim \Psi_4$ autostati contemporanei di M_i ,

$$[M_i, M_j] = 0, i, j = 1 \dots 4$$

$$m_{1x} m_{2y} m_{3y} = +1$$

$$m_{1y} m_{2x} m_{3y} = +1$$

$$m_{1y} m_{2y} m_{3x} = +1$$

$$m_{1x} m_{2x} m_{3x} = -1$$

$$\begin{pmatrix} m_{ix} = \pm 1 \\ m_{iy} = \pm 1 \end{pmatrix}$$

Contraddizione?
Inconsistenza?

⇒ In realtà sono
4 eventi diversi:
No difficoltà...

• Anche se $[M_i, M_j] = 0$

$M_1 \sim M_4$ non possono essere misurati
e determinati simultaneamente !

(per es., $[\sigma_{2x}, \sigma_{2y}] \neq 0$)

Analogo "paradosso" apparente :

(Teo. Kochen-Specker)

(PVM $\Rightarrow$ POVM)

Fattorizzazione vs Entanglement.

(1) 2 elettroni distanti

$$|\Psi\rangle = |p_1^{(1)}\rangle |p_2^{(2)}\rangle - |p_2^{(1)}\rangle |p_1^{(2)}\rangle$$

$$p_1 = \text{Idrogeno}_{\text{lab}} |\uparrow\rangle$$

$$p_2 = \text{Idrogeno}_{\text{marte}} |\downarrow\rangle$$

$$\Psi(r_1, r_2, \text{spin}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \psi_{\text{lab}}(r_1) |\uparrow\rangle \psi_{\text{marte}}(r_2) |\downarrow\rangle - \psi_{\text{marte}}(r_1) |\downarrow\rangle \psi_{\text{lab}}(r_2) |\uparrow\rangle \right\}$$

$$\approx \psi_{\text{lab}}(r_1) |\uparrow\rangle$$

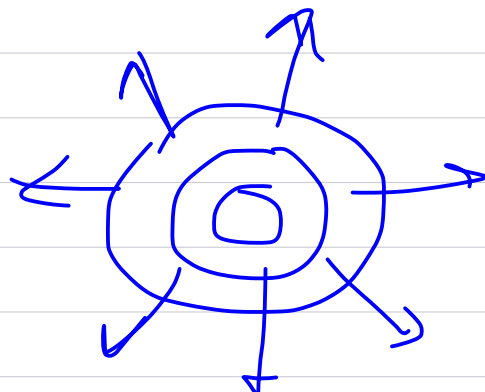
$r_1 \sim \text{lab.}$
 $r_2 \sim \text{marte}$

cfr

$$\psi(r_1, r_2, \uparrow \downarrow)$$

$$= \psi_0(r) \frac{\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow}{\sqrt{2}}$$

$$\psi_0(r) \sim e^{ikr}/r$$



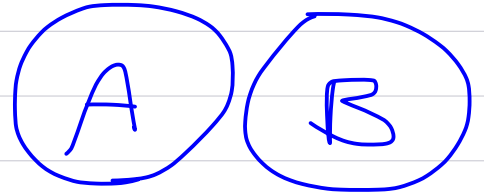
$$|\Psi^{\text{spin}}\rangle = \frac{\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow}{\sqrt{2}}$$

Entropia di entanglement

$$|\Psi\rangle = \cos\alpha \overset{A}{\uparrow} \overset{B}{\downarrow} + \sin\alpha \overset{A}{\downarrow} \overset{B}{\uparrow}$$

osservaz del sistema A

→ stato misto



$$\rho = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & 0 \\ 0 & \sin^2\alpha \end{pmatrix}$$

$$E = -\text{Tr} \rho \log \rho$$

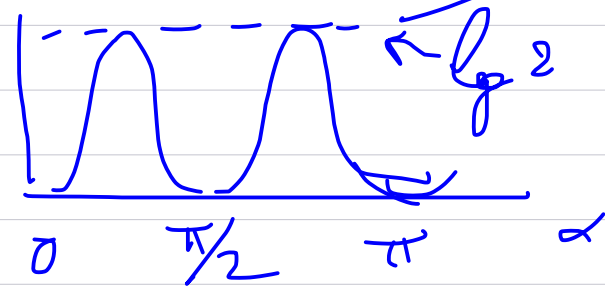
$$= -2 \left(\cos^2\alpha \log \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \log \sin^2\alpha \right)$$

$$\alpha = 0, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \pi$$

$|\psi\rangle = \uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow, \uparrow\downarrow, \dots$
stati fattorizzabili

Entropia di entanglement

(von Neumann)



$$\alpha = \pm \frac{\pi}{4} \quad |\Psi\rangle = \frac{\uparrow\downarrow \pm \downarrow\uparrow}{\sqrt{2}} \quad (\text{massimamente correlati})$$

Misura è MQ

- Natura statistica delle predizioni in MQ
- (A) • "Collasso" delle fn. d'onda al momento della "misura"

$$| \psi \rangle = \sum_n a_n | n \rangle \xrightarrow[\substack{\text{misura} \\ F=f_m}]{F=f_m} | m \rangle \Rightarrow \dots$$
$$F|n\rangle = f_n|n\rangle$$

• $[F, G] = i\hbar \lambda$ etc $\Rightarrow$

Un Istante dopo la misura di $F = f$
 $\Rightarrow$ Indeterminazione di G .

$$\Delta f \Delta g \gtrsim \hbar \cdot \lambda$$

- Evoluzione univoca, deterministiche di $\Psi(q, t)$
 $\Leftrightarrow$ Salto al momento della misura?

- (B) • Il processo della misura $\sim$ un processo fisico
- evoluzione temporale, descritto da

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H \Psi \quad ?$$

• $(A) \Leftrightarrow (B) \quad ?$

Toy model (Bell)

$$H = g \sigma_z \hat{p}_z + \frac{p_x^2}{2m} \quad (\text{"Stern-Gerlach"})$$

$$t=0 \quad |\psi_0\rangle = \phi(z) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

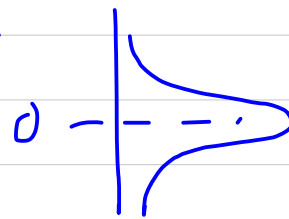


$$= \phi(z) \{ a |\uparrow\rangle + b |\downarrow\rangle \}$$

$$|a|^2 + |b|^2 = 1.$$

$$\phi(z) \sim e^{-z^2/c} \quad z \uparrow$$

un pacchetto ~ una distribuz.
del fascio incidente



$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \quad \Rightarrow$$

$$\psi(z, t) = \begin{pmatrix} a \phi(z - \frac{g}{\hbar} t) \\ b \phi(z + \frac{g}{\hbar} t) \end{pmatrix}$$

$|a|^2 / |b|^2 \sim$ lettura dello spin S_z .

$|a|^2$
 $|b|^2$

$$\hookrightarrow a \phi(z - \frac{g}{\hbar} t) |\uparrow\rangle + b \phi(z + \frac{g}{\hbar} t) |\downarrow\rangle$$

Interferenza?

1 e 2 persona

macroscopica separ. $t \rightarrow 1$

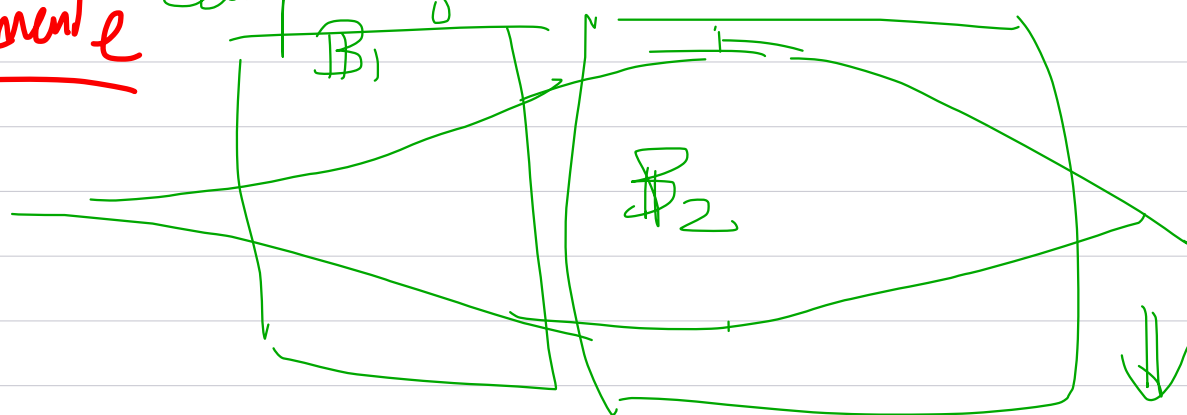
- $\Delta z = |z_1 - z_2| \gg r_B$
Separazione macroscopica dei pacchetti.

--> $|4\rangle \rightarrow \rho \sim \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & |b|^2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Buon modello della "misura" in MQ ?

Ma
attualmente

Campo mag. B_1



"Quantum eraser"

Interferenza

Ricostruzione dell'interferenza osservata

La separazione macroscopica tra i due termini non è sufficiente.

• Inserzione di uno schermo fotografico

Il processo è
irreversibile.

Decoerenza



Processo di misura, decoerenza, e il gatto di Schrödinger.

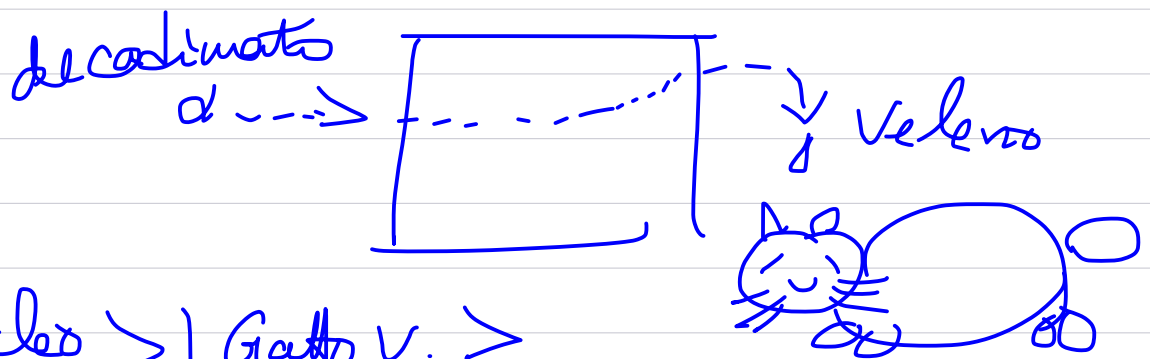
$$\sum_n C_n |n\rangle |\Psi_0\rangle |\text{Env. } 0\rangle$$

ambiente.
apparecchio, con
il puntatore classico
1, 2, 3 ...

misura $\rightarrow \sum C_n |n\rangle |\Phi_n\rangle |\text{Env. } 0\rangle$

lettura $\Rightarrow \sum C_n |n\rangle |\Phi_n\rangle |\text{Env. } n\rangle$

Gatto di Schrödinger



$$|\text{Nucleo}\rangle |\text{Gatto } v.\rangle$$

$$\Rightarrow (\alpha |\text{decayed}\rangle + \beta |\text{non decayed}\rangle) |\text{gatto } v.\rangle$$

$$\Rightarrow \alpha |\text{decayed}\rangle |\text{gatto m.}\rangle + \beta |\text{non decayed}\rangle |\text{gatto } v.\rangle$$

~ paradosso ?

In realtà l'evoluzione temporale del processo coinvolge tutti noi

$|Nucleo\rangle |gatto\ v\rangle |Noi\ che\ vediamo\ gatto\ v.\rangle$

$\rightarrow \{ \alpha |decayed\rangle + \beta |non\ decayed\rangle \} |gatto\ v.\rangle |Noi\ che\ vediamo\ gatto\ v.\rangle$

$\rightarrow (\alpha |decayed\rangle |gatto\ m\rangle + \beta |non\ decayed\rangle |gatto\ v\rangle) |Noi\ che\ vediamo\ gatto\ m\rangle$

$\Rightarrow \alpha |decayed\rangle |gatto\ m\rangle |Noi\ che\ vediamo\ gatto\ m\rangle$

$+ \beta |non\ decayed\rangle |gatto\ v\rangle |Noi\ che\ vediamo\ gatto\ vivo\rangle$

$\rightarrow$ No contraddizione?

3 punti di vista

(1) Many-worlds interpretation (Everett)



tutte le possibili evoluzioni
sono lì !

(mondi paralleli ---)
"Lane sott. le" -

(2) Collasso dinamico spontaneo

(3) Nulla di questo; Eg. Schrödinger / funz. d'onda
Un metodo conveniente (bookkeeping device) per
correlare i risultati delle misure passate e future

Q:

- (1) Evoluzione coerente e deterministica di ψ
 $\Leftrightarrow$ Prediz./colosso. statistica
- (2) Evoluzione q. (Eq. Schrödinger) $\Leftrightarrow$
Evoluzione classica (deterministica o No)
- (3) $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \rightarrow$ Evolutione dell'ampiezza
d. prob. dell'eventuale misura
e NON letterale evoluzione temporale e.g.
del decadimento spontaneo!
- (4) $P_n = |K_n|^2$ è il risultato di un
eq Schrödinger, $\psi = \psi^{\text{universo}}$?
 $|\psi\rangle = |\psi\rangle^{\text{micro}} |\psi\rangle^{\text{macro}} \rightarrow \dots$
- (5) o un assioma indipendente?
- (6) $i\hbar \frac{\partial \psi^{\text{universo}}}{\partial t} = H \psi^{\text{universo}}$?

(7) Entanglement - Computer quantistico ?

(8) Entanglement - Neuroni/cervelli - coscienza ?

(9) Fluttuazione quantistica $\Rightarrow$ Origine dell'universo?

(10) etc. Funzione d'onda d. universo ?

(11) etc. $\hookrightarrow 14 |^2$? chi lo misura?

-

FINE DEL CORSO.