

Stati quantistici

$$\lambda = h/p \rightarrow$$

(dualità onda-corpuscolo)

Lo "stato" di una particella $\equiv \{q, p\}$

Lo stato quantistico (o lo stato) $\psi(q, t) \approx \psi(q, x, t)$

$\psi(q, t)$: funzione d'onda

Conoscenza di $\psi(q, t)$: conoscenza completa dello stato.

• Particella in $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$

$$\psi = \psi(r, t)$$



$\mathbb{R}$

$$\Rightarrow dP = |\psi(r, t)|^2 d^3r =$$

la probabilità che la particella si trovi in $\{r, r+dr\}$

$$\int d^3r |\psi(r, t)|^2 = 1$$

(la fun. d'onda è normalizzata)

Per generalità, 2 particelle in $\mathbb{R}^3$

$$\psi = \psi(r_1, r_2; t)$$

$$P d^3r_1 d^3r_2 = |\psi|^2 d^3r_1 d^3r_2$$

$$\{q\} \rightarrow \psi(q, t)$$

$$P dq = |\psi(q, t)|^2 dq$$

$\left(\pi dq_i \right)$

Probabilità totale

$$\| \psi \|^2 \equiv \int |\psi(q)|^2 dq = 1.$$

$$\| \psi \| = \left(\int dq |\psi(q)|^2 \right)^{1/2} \equiv \text{Norma dello stato}$$

$$0 < \int dq |\psi|^2 < \infty \quad \text{funz. d'onda Normalizzabile.}$$

$$\psi(q) \rightarrow \tilde{\psi}(q) = c \psi(q) \quad \text{t. che}$$

$$\| \tilde{\psi} \| = 1. \Rightarrow$$

Normalizzare la fun. d'onda.

In MQ.

$$\psi \sim c \psi \quad c \neq 0.$$

N.B. Concetto della funz. d'onda $\Leftarrow$ fatto empirico.

ma è chiaramente distinto dal concetto di onde classiche

e.g. $\psi \neq c\psi$ per onda classica

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \propto |A|^2$$

N.B. $|\psi(r)|^2 \neq$ una distribuzione materiale.

e.g. $|\psi(r_1, r_2, t)|^2 d^3r_1 d^3r_2$
distribuz. in $\mathbb{R}^3$

Non è una
! (distrib. in uno spazio 6D!)

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE (ψ non!)!

Siano ψ_1, ψ_2 due stati q di un sistema.

$\Rightarrow$ lo è anche $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ $\left(\begin{array}{l} (|c_1|^2 + |c_2|^2 < \infty) \\ \neq 0 \end{array} \right)$
 $\rightarrow$ Diffrazione/interferenza d. elettroni.

ma il significato di $(*)$ è diverso da quello di un'onda classica anche nel seguente senso.

Siano ψ_1, ψ_2 due stati in cui lo misuro di una quantità F dia f_1 e f_2 rispettate con certezza.

La misura di F nello stato $(*) \Rightarrow ?$

Legge MQ dice:

Misura di F da

f_1 con prob. $\frac{|c_1|^2}{|c_1|^2 + |c_2|^2}$,

f_2 " " $\frac{|c_2|^2}{|c_1|^2 + |c_2|^2}$,

e prob. 0 per altri possibili risultati,

$f_3, f_4, \dots$

Il senso di proprietà "intermedia" di $(*)$

sta nelle probabilità di ottenere f_1, f_2 , e NON nel risultato intermedio (e.g. $\frac{f_1 + f_2}{2} \dots$)

Principio di sovrapposizione richiede che l'eq. del moto abbia la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(q, t) = T \psi(q, t)$$

→ operatore lineare.

$$T(c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2) = c_1 T \psi_1 + c_2 T \psi_2.$$

es. $T \psi = \psi^2$ NO.

$T \psi = \frac{\partial}{\partial t} \psi$ S.

In MQ l'eq. del moto è data dall'eq. di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi$$

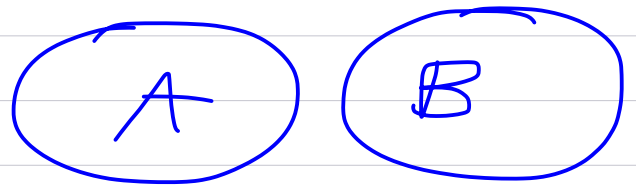
↳ $\hat{H}$ = operatore Hamiltoniano (Energia)

$$\hat{H} \Leftrightarrow H_a(q, p; t) \quad ?$$

(Dopo!)

Stati quantistici e sistemi composti

Se le interaz. tra A e B
sono trascurabili, e se



le correlazioni tra loro sono trascurabili,
allora

$$\Psi_{A+B} = \Psi_A \cdot \Psi_B. \quad \left(\begin{array}{l} \text{Funs. d'onda} \\ \text{fattorizzata} \end{array} \right)$$

- L'ipotesi di fattorizzazione è soddisfatta con grande precisione.
- Correlazioni tra A e B dovute alla presenza di particelle identiche $\dots \rightarrow$
Funzioni d'onda simmetriche o antisimmetriche
(Statistiche di BE o FD)
- Anche senza le statistiche BE o FD.
le part. che sono intere nel passato
SONO correlate. (Entanglement;
correlazioni quantistiche)

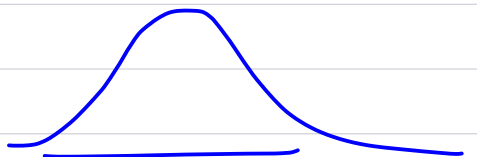
cfr Fattorizzazione

Relazione di indeterminazione (di Heisenberg)

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{2}$$

segue dalla descriz. ondulatoria di un particella

$$\psi(x) = c \cdot e^{-x^2/2d^2}$$



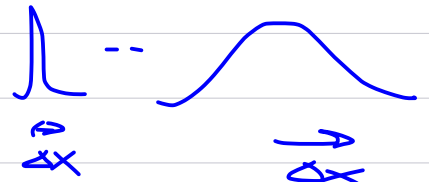
$$\int |\psi|^2 = c^2 \sqrt{\pi}$$

$$\therefore c = d^{\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{4}}$$

$$P(x)dx = |\psi|^2 dx$$

$$\Rightarrow \langle x \rangle = \int dx |\psi|^2 \cdot x = 0$$

$$\Delta x \equiv \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$$



$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-x^2/2d^2} = c^2 \left(\frac{-2}{2\beta} \right) \int dx e^{-\beta x^2} \quad \beta = \frac{1}{d^2}$$

$$= c^2 (-) \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} = \frac{c^2}{2\beta^{\frac{3}{2}}} \frac{d^3}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{d^{\frac{3}{2}}} = \boxed{\frac{d^2}{2}} \quad \Delta x \sim d/\sqrt{2}$$

TRASF. DI FOURIER

$$m_e \quad \psi(x) = c \cdot \int_0^{\infty} d\lambda A(\lambda) e^{2\pi i x \lambda} + c.c.$$

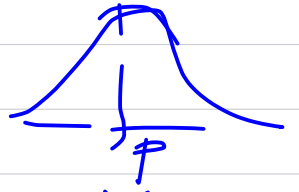
$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (\text{de Broglie})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{\psi}(p) e^{ipx/\hbar}$$

$p = \text{impulso}$

Che la trasform. inversa è data da (dopo)

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \psi(x) \\ &= \frac{c}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx e^{-\frac{x^2}{2d^2} - ipx/\hbar} = \int dx e^{-\frac{1}{2d^2} \left(x + \frac{ipd^2}{\hbar}\right)^2 - \frac{d^2 p^2}{2\hbar^2}} \\ &= \text{cost.} \cdot e^{-d^2 p^2 / 2\hbar^2} : \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\rightarrow \Delta p &= \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle^{1/2} = (\langle p^2 \rangle)^{1/2} \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}d} \end{aligned}$$

$$d \rightarrow \frac{\hbar}{d}$$

$$\therefore \Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar/2.$$

Gaussian $\rightarrow$ minimo $\Delta x \Delta p$

In generale, $\Delta x \Delta p \gtrsim \frac{\hbar}{2}$
(dopo!)

Variabile dinamica e operatori

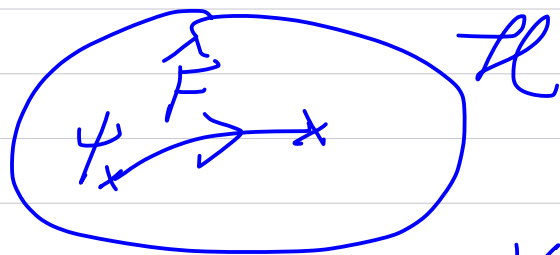
Ogni variabile dinamica, (posizione, p , E , L ...)

$$F \rightarrow \hat{F} \text{ (operatore lineare)}$$

$$\psi \rightarrow \hat{F} \psi$$

$\hat{F}$ è lineare se e solo se

$$\hat{F}(c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2) = c_1 \hat{F} \psi_1 + c_2 \hat{F} \psi_2 \quad \forall c_1, c_2$$



I possibili risultati della misura di F sono
"gli autovalori" di $\hat{F}$, i.e.

$$\left. \begin{aligned} \hat{F} \psi_n &= f_n \psi_n, (*) \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\ \|\psi_n\| &= 1. \end{aligned} \right\} \text{(anche continuo)}$$

$\{f_n, \psi_n\}$ sono gli autovalori e gli autostati associati.

Uno stato qualsiasi può essere sviluppato
come combinazione lineare di $\{\psi_n\}$

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n, (*) \quad \sum_n |c_n|^2 = 1$$

Lo misura di F

• fatto nello stato $\psi_n \Rightarrow \bar{F} = f_n$ ^{com} ~~certezza~~.

• fatto nello stato generico $\psi \Rightarrow$

i risultati: f_n con probabilità $P_n = |c_n|^2$

• Il valore medio (valore d'aspettazione) in ψ

$$\langle F \rangle_\psi = \sum_n P_n f_n = \sum_n f_n |c_n|^2$$

• Gli autostati corrispondenti a due autovalori
distinti sono ortogonali: ~~DA~~ DOPO NOTA

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle \equiv \int d\mathbf{q} \psi_n^*(\mathbf{q}) \psi_m(\mathbf{q}) \quad \text{N.B. d. Dirac}$$

$$= \delta_{n,m} \cdot \begin{matrix} \nearrow 1 & n=m \\ \searrow 0 & n \neq m \end{matrix}$$

$$\bullet \langle F \rangle_\psi = \int d\mathbf{q} \psi^* \hat{F} \psi \equiv \langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle$$

$$\begin{aligned} \therefore \langle \rangle &= \int d\mathbf{q} \psi^* \hat{F} \sum_n c_n \psi_n = \int d\mathbf{q} \psi^* \sum_n c_n f_n \psi_n \\ &= \sum_{m,n} c_m^* c_n f_n \underbrace{\int d\mathbf{q} \psi_m^* \psi_n}_{\delta_{m,n}} = \sum_n f_n |c_n|^2 \quad \underline{\text{OK}} \end{aligned}$$

$$\psi, \varphi \in \mathcal{H}$$

$$\text{Def. } \langle \psi | \varphi \rangle = \int d\mathbf{q} \, \psi^*(\mathbf{q}) \varphi(\mathbf{q})$$

(prodotto scalare Hermitiano)

Dirac

$$\text{N.B. } \langle \psi | \varphi \rangle^* = \langle \varphi | \psi \rangle$$

$$\text{N.B. } \langle \psi | c\varphi \rangle = c \langle \psi | \varphi \rangle$$

$$\langle c\psi | \varphi \rangle = c^* \langle \psi | \varphi \rangle$$

$$\langle \psi | c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \rangle$$

$$= c_1 \langle \psi | \varphi_1 \rangle + c_2 \langle \psi | \varphi_2 \rangle$$

Legge fondamentale della MQ
(postulato)

$$\sum_n |c_n|^2 = 1$$

$$\|\psi_n\| = 1.$$

- F in $\psi = \sum_n c_n \psi_n \rightarrow f_n, n=1, 2, \dots$
- Misura di $F \Rightarrow f_n$ con probabilità

$$P_n = |c_n|^2$$

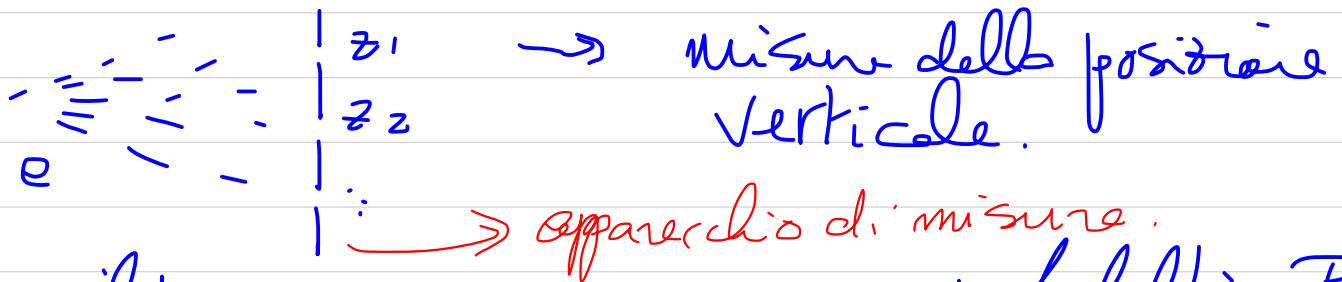
N.B. Immediatamente dopo la misura che ha dato, come risultato, $F = f_k$, lo stato si trova in $\psi = \psi_k$.

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n \begin{array}{l} \xrightarrow{f_2} \psi_2 \\ \xrightarrow{f_7} \psi_7 \\ \vdots \\ \xrightarrow{f_n} \psi_n \end{array}$$

Questo fatto è noto come
{ collasso } della funzione d'onda. ma
riduzione
questa parola non va interpretata letteralmente.

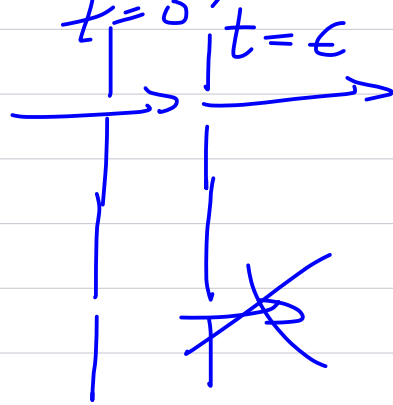


In realtà si tratta di una condizione di consistenza. Per u.,



il passaggio con z_i con probabilità P_i .
 Ma immediatamente dopo il passaggio attraverso la fenditura z_i , l'elettrone si trova certamente a $z = z_i$. !! (tautologia?)

°° È utile considerare di sovrapporre una seconda parete, con le stesse fenditure.



- Infatti, se non è così, la MQ sarebbe una teoria fisica inutile, senza senso se ~~non~~ il risultato di una misura non potesse essere utilizzato come CONDIZIONE INIZIALE (i.e. preparaz. dello stato) per lo studio di evoluzione temporale successiva ~~del sistema~~.

Una formula alternativa a P_n :

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n$$

$$c_n = \langle \psi_n | \psi \rangle$$

$\therefore P_n = \underbrace{|\langle \psi_n | \psi \rangle|^2}_{\text{Proiezione del vettore } \psi \text{ su } \psi_n .}$

Operatore Hermitiano.

Abbiamo visto:

Variazione dinamica $\Leftrightarrow$ operatore lineare.

(Condiz. ~~NON~~ sufficiente)

$\therefore$ Dobbiamo richiedere che

$$f_n, \text{ quindi } \langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle = \sum_n |c_n|^2 f_n$$

siano numeri reali. $\Rightarrow$ Quali $\hat{F}$?

Risposta: $\hat{F}^T = \hat{F}$ operatore Hermitiano.

Def F^T .

Dato ψ , se esiste $\chi \in \mathcal{H}$, tale che per qualsiasi $\phi \in \mathcal{H}$ vale

$$\int dq (F \phi^*) \psi = \int dq \phi^* \chi$$

allora $\chi \equiv F^T \psi$

Il coniugato Hermitiano

$$\forall \psi, \exists \chi \dots \Rightarrow \int dq (F \phi)^* \psi = \int dq \phi^* \chi$$

$$\Rightarrow \chi \equiv F^T \psi$$

i.e. $\langle F\psi | \phi \rangle = \langle \psi | F^\dagger | \phi \rangle$

D'altra parte, dalla def. di $\langle A | B \rangle$

$$\Rightarrow \langle F\psi | \phi \rangle = \langle \phi | F | \psi \rangle^*$$

cioè: $\langle \psi | F^\dagger | \phi \rangle = \langle \phi | F | \psi \rangle^*$

per qualsiasi ψ, ϕ

Per una matrice
 $(M^\dagger)_{ij} = M_{ji}^*$

$\Rightarrow$ Questo $\hat{F}$ è Hermitiano se
 $F^\dagger = F$

i.e. $\langle \psi | F | \psi \rangle^* = \langle \psi | F^\dagger | \psi \rangle = \langle \psi | F | \psi \rangle$

$\therefore \langle \psi | F | \psi \rangle = \text{reale}$.

Prendendo $\psi = \psi_n$

$\langle \psi_n | F | \psi_n \rangle = f_n = \text{reale}$, OK

$F^\dagger = F \Rightarrow f_n, \langle F \rangle = \sum_n |\psi_n|^2 f_n$
 reali.

(Condiz. sufficiente).

È anche necessario? $\Rightarrow$ Sì!

$$\because \langle \psi | F | \psi \rangle = \text{reale}, \quad \forall \psi.$$

$$\text{Per } \psi = \chi + e^{i\alpha} \varphi \quad \alpha = \text{reale}.$$

$$\begin{aligned} \text{reale} &= \langle \chi + e^{i\alpha} \varphi | F | \chi + e^{i\alpha} \varphi \rangle \\ &= \langle \chi | F | \chi \rangle + \langle \varphi | F | \varphi \rangle \\ &\quad + e^{i\alpha} \langle \chi | F | \varphi \rangle + e^{-i\alpha} \langle \varphi | F | \chi \rangle \end{aligned}$$

$$\therefore \langle \chi | F | \varphi \rangle = \langle \varphi | F | \chi \rangle^* \quad (\neq \varphi, \chi)$$
$$= \langle \chi | F^\dagger | \varphi \rangle$$

$$\therefore F^\dagger = F \quad \text{OK.}$$

Gli autovettori (autostati) di un oper. Hermitiano associati a due autovalori sono ortogonali.

$$\hat{F} \psi_n = f_n \psi_n^{(1)}; \hat{F} \psi_m = f_m \psi_m^{(2)}$$

$$\int d\psi \psi_m^* \textcircled{1} \Rightarrow \langle \psi_m | \hat{F} | \psi_n \rangle = f_n \langle \psi_m | \psi_n \rangle \textcircled{3}$$
$$\left(\int d\psi \psi_n \textcircled{2} \right)^* \langle \psi_n | \hat{F} | \psi_m \rangle = f_m \langle \psi_n | \psi_m \rangle$$

$$\rightarrow \langle \psi_m | \hat{F} | \psi_n \rangle = f_m \langle \psi_m | \psi_n \rangle \textcircled{4}$$

③-④:

$$(f_n - f_m) \langle \psi_m | \psi_n \rangle = 0$$

$$\therefore \langle \psi_m | \psi_n \rangle = 0 \text{ se } f_n \neq f_m.$$

$$\langle \psi_n | \psi_n \rangle = \|\psi_n\|^2 = 1 \text{ (Normalizz.)}$$

$$\therefore \langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn} \text{ (ortogonalit\`a)}$$

Prodotto di operatori.

$$\hat{F}, \hat{G} \Rightarrow$$

$$\hat{F}\hat{G}|\psi\rangle \equiv \hat{F}(\hat{G}|\psi\rangle).$$

In generale,

$$\hat{F}\hat{G} \neq \hat{G}\hat{F}$$

- $A^\dagger A$ è un operatore positivo $\Leftrightarrow \langle \psi | A^\dagger A | \psi \rangle \geq 0$
 $\forall |\psi\rangle$

Commutatori

Il commutatore tra $\hat{F}$ e $\hat{G}$: def.

$$[\hat{F}, \hat{G}] \equiv \hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F} \quad \checkmark$$

$$[\hat{F}, \hat{G}] = 0 \Rightarrow \hat{F} \text{ e } \hat{G} \text{ commutano.}$$

Le variabili F e G sono compatibili.
(osservabili)

$$(FG)^\dagger = G^\dagger F^\dagger.$$

→ anche se $F^\dagger = F, G^\dagger = G$, FG non è Hermitiano.

Teorema: Se $[F, G] = 0$, si possono prendere gli autostati d. F e d. G , di modo che siano autostati contemporanei, i.e. sia d. F che d. G .

$$\begin{cases} F \psi_{n,i} = f_i \psi_{n,i} \\ G \psi_{n,i} = g_n \psi_{n,i} \end{cases} !$$

(Nello stato $\psi_{n,i}$ F e G hanno valori definiti, simultaneamente.)

$$\begin{aligned} & \text{(Viceversa, } [\hat{F}, \hat{G}] = c\hbar \neq 0 \\ & \Rightarrow \Delta F \cdot \Delta G \gtrsim \hbar \end{aligned})$$

Dimostrazione.

Sia

$$\hat{G} |\psi_n\rangle = g_n |\psi_n\rangle$$

Ora considero lo stato $\hat{F} |\psi_n\rangle$.

$$G(F|\psi_n\rangle) = FG|\psi_n\rangle = g_n F|\psi_n\rangle$$

∴

$\Rightarrow 0$ (i) $F|\psi_n\rangle$ non è normalizzato
 $\|F|\psi_n\rangle\| = \infty$;

(ii) $F|\psi_n\rangle \propto |\psi_n\rangle$;

(iii) $F|\psi_n\rangle = 0$.

oppure

$F|\psi_n\rangle$ è un altro autostato di G
 con g_n : i.e.

$g_n = \text{degenera}$

$g_n \equiv \equiv$

Ripetendo $F^2|\psi_n\rangle, F^3|\psi_n\rangle \dots$

$\Rightarrow G|\psi_{n,i}\rangle = g_n|\psi_{n,i}\rangle, (i=1,2,\dots,s)$

Ora $n \rightarrow \star$

$$F|\psi_i\rangle = \sum_j F_{ij}|\psi_j\rangle$$

di modo che

$$F_{ij} = \langle \psi_i | F | \psi_j \rangle$$

j -elem. d.
 Matrice di F

$(F)_{ij} = F_{ij}$ è una matrice Hermitica
 Può essere diagonalizzata

$F^T = F \Rightarrow$ una transf. Unitaria

$$F v^a = f^a v^a$$

$$v^{a\dagger} v^b = \delta^{ab}$$

$$U \equiv \begin{pmatrix} |v^1\rangle \\ |v^2\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad U^{-1} F U = \tilde{F} = \begin{pmatrix} f^1 & & \\ & f^2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

Introduciamo.

$$\begin{aligned}
 & \boxed{\psi_i = U_{ij} \varphi_j}^* \quad \varphi_j = U_{j*}^{-1} \psi_i. \\
 & \hat{F} |\varphi_i\rangle = \sum_j U_{ij}^{-1} \hat{F} \varphi_j = \sum_j U_{ij}^{-1} F_{jk} \varphi_k \\
 & = (\bar{U} \hat{F} U)_{ik} |\varphi_k\rangle = (\hat{F})_{ik} \varphi_k \\
 & = f^{(i)} |\varphi_i\rangle
 \end{aligned}$$

$$* \quad \psi_{n,i} = \sum_j U_{ij} \varphi_{n,j} \quad n=1,2,\dots$$

$$\varphi_{n,i} = (U^{-1})_{ij} \psi_{n,j}$$

$$\left. \begin{aligned} G \varphi_{n,i} &= g_n \varphi_{n,i} \\ F \varphi_{n,i} &= f_i \varphi_{n,i} \end{aligned} \right\}$$

$\{\varphi_{n,i}\}$ sono autostati simultanei di $\hat{F}$ e $\hat{G}$.

F, G sono osservabili compatibili.
Nello stato $|\varphi_{n,i}\rangle$ le misure di F e G
danno con certezza f_i e g_n , rispettivamente.

In generale, ci sono insieme massimali d. osservabili, $F_1, F_2, \dots, F_N$, con gli operatori associati che commutano tra di loro, $[\hat{F}_i, \hat{F}_j] = 0$.

$\Rightarrow$ Autostati contemporanei, $|f_1, f_2, \dots, f_N\rangle = |\psi\rangle$ ^{funz. d'onda} determinano univocamente lo stato q .

$\Rightarrow$ Conoscenza completa dello stato.

Una misura di un insieme incompleto d. $\{F\}$
 $\Rightarrow \psi$

Vice versa,

$[F, G] \neq 0 \Rightarrow$ P.O. di indeterminazione.

$$\Delta F \cdot \Delta G \geq \frac{\hbar}{2}$$

Operatore impulso .

$$\hat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}$$

N.B. $\psi_p(x) = e^{2\pi i x / \lambda} = e^{ipx / \hbar}$

(onda monochromatica, $p = \hbar / \lambda$)

Uno stato di impulso definito ($\Rightarrow \Delta p = 0$)

Infatti:

$$-i\hbar \frac{d}{dx} \psi_p(x) = \underbrace{p}_{\psi_p(x)}$$

$\psi_p(x)$ è l'autostato di $\hat{p}$.

3D $\psi_{p_0}(r) = e^{i p_0 \cdot r / \hbar}$

$$\hat{p}_i \psi_{p_0} = p_{0i} \psi_{p_0} \quad \checkmark$$

Commutatore fondamentale

$$[x, p] = i\hbar \quad \left(\begin{array}{l} (x \cdot p - p \cdot x) (\dots) \\ \left[x \cdot \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) - \left(i\hbar \frac{d}{dx} \cdot x \right) \right] (\dots) \\ = i\hbar (\dots) \end{array} \right)$$

$$[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}$$

Operatore Hamiltoniano

$$H^{MQ}(\hat{p}, \hat{q}) = H^cl(p, q) \left| \begin{array}{l} q \rightarrow \hat{q} = q \\ p \rightarrow \hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dq} \end{array} \right.$$

Eq. agli autovalori di H ,

$$H(q, p) \psi_n = E_n \psi_n \quad (E_n = \text{autovalori di energia})$$

(EQ. SCHRÖDINGER - indip dal tempo)

Eq. Evoluzione temporale

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(q, t) = H(q, p) \psi(q, t)$$

EQ. DI SCHRÖDINGER.

Relazione di Heisenberg. $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$.

$$A = x - \langle x \rangle + i\alpha(p - \langle p \rangle)$$

$$\langle x \rangle = \langle \psi | x | \psi \rangle, \quad \langle p \rangle = \langle \psi | p | \psi \rangle.$$

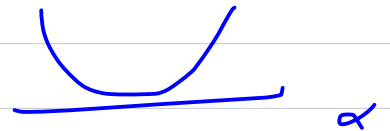
$$0 \leq \langle \psi | A^\dagger A | \psi \rangle$$

$$= \langle \psi | (x - \langle x \rangle - i\alpha(p - \langle p \rangle))(x - \langle x \rangle + i\alpha(p - \langle p \rangle)) | \psi \rangle$$

$$= \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle + \alpha^2 \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle + i\alpha [x, p]$$

$$= \langle x \rangle^2 + \alpha^2 \langle p \rangle^2 - \alpha \hbar$$

$$\Rightarrow \hbar^2 - 4(\Delta x)^2(\Delta p)^2 \leq 0$$



$$\therefore \Delta x \Delta p \geq \hbar/2.$$

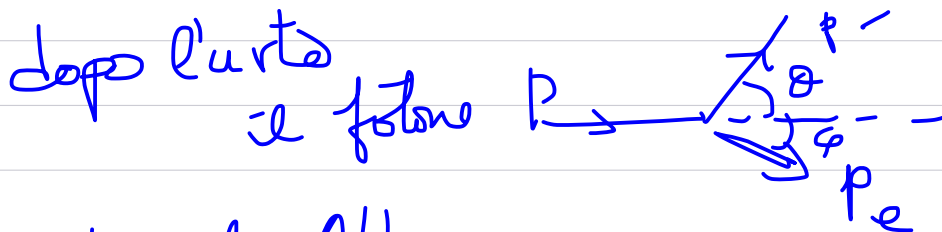
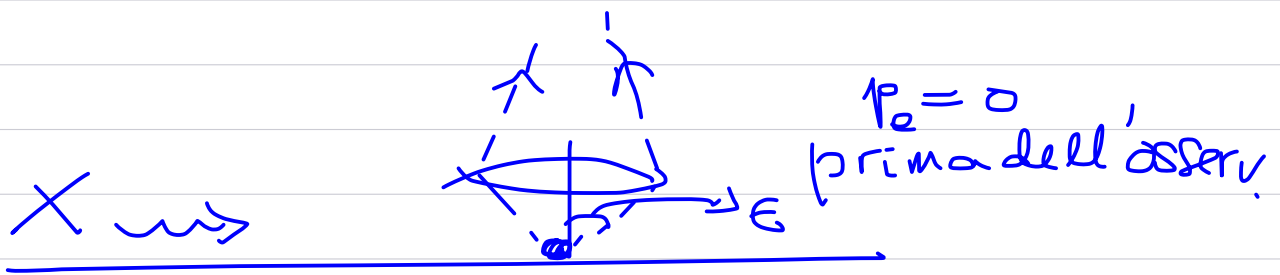
• La rel. di indeterminazione riflette la legge della misura stessa.

Q: Cosa succede se uno prepara uno stato in cui, e.g. G , è perfettamente definito, e misuriamo in questo stato F ($\{F, G\} \neq 0$) con arbitraria precisione?

Gedanken experiments di Heisenberg (Physical foundations)

(i) misura della posizione dell'elettrone con un microscopio.

Schematizzando



Legge di Abbe

Ernst Abbe 1840-1905

$$\Delta x \sim \frac{\lambda}{\sin \epsilon}$$

indice di rifrazione $\sim$ on / $\sim$ on /

Luco $\rightarrow$ Carl-Zeiss binocolo ...

D'altra parte, la cinematica $\Rightarrow$ (de Broglie)

$$p' \sin \theta = p_e \sin \phi$$

$$p' \cos \theta + p_e \cos \phi = p$$

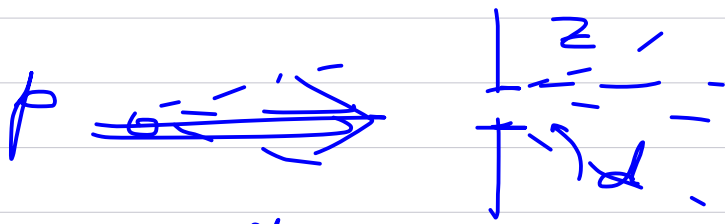
La direz. di p_e è nota

$$\Delta p_e(p_e \cos \phi) = \Delta p' \sim p \sin \epsilon$$

$$\therefore \Delta x \cdot \Delta p \sim \frac{\lambda}{\sin \epsilon} \cdot p \sin \epsilon = \lambda \cdot p \sim h$$

$\leftarrow$ Lucio $\sim$ fotone $\sim$ particella

Determina. di z attraverso il passaggio



$$P_z = 0$$

Diffrazione (elettrone è onda)

$$\Rightarrow \sin \theta \sim \frac{\lambda}{d} \quad \left(\lambda \ll d \right. \\ \left. \text{Huygens} \right)$$

$$\lambda = h/p$$

Dopo il passaggio ($\Delta z \sim d$)

$$\Delta P_z \sim p \sin \theta \sim p \frac{\lambda}{d} = \frac{h}{d} \quad \left(\begin{array}{c} \text{elettrone} \\ \text{particella} \end{array} \right)$$

$$\therefore \Delta z \cdot \Delta P_z \sim h$$

In questo esperimento la dualità dell'
elettrone è usata.

Osservazioni

(i) $\Delta x \gtrsim h$ si riferisce alla determinaz. contemporanea.

(ii) Contemporaneità (simultaneità), $\Delta t = 0$, è una nozione sottile in fisica.

($\Delta t = "0" ? < 10^{-20} \text{ sec.} ? \dots$)

In fatti, nel secondo es. . /

$$\Delta p_z \Big|_{t=0_-} \cdot \Delta z \Big|_{t=0_+} \rightarrow 0 \quad \text{possibile ma non rilevante!!}$$

cfr $\Delta p_z \Big|_{t=0_+} \cdot \Delta z \Big|_{t=0_+} \gtrsim h$ (Preparazione dello stato)

(iii) Il limite $\Delta p \Delta p \gtrsim h \leftarrow$ Legge MQ, è indep. dell'apparecchio/dell'esperienza dell'osserv.

(iv) La misura $\Rightarrow$ disturba il sistema osservat
(cfr. Luna di Galileo)

(v) "misura" $\Rightarrow$ Concetto sbagliato (J. Bell)

(vi) Il determinismo classico $\times$

(vii) Caos ?

Osservazioni $\left\{ \begin{array}{l} \text{Legge fondamentale MQ} \\ \text{Aspetto probabilistico prediz. MQ.} \end{array} \right.$

$$(1) \quad \psi = \sum_n c_n \psi_n, \quad \|\psi_n\| = 1$$

$$F\psi_n = f_n \psi_n$$

Misura di F in $\psi \Rightarrow$

$$f_n \text{ con } \boxed{I_n = |c_n|^2} \quad (\text{**}) \quad \square$$

$\Rightarrow$ Ma immediatamente dopo ?

$$\psi \xrightarrow[F=f_n]{\text{Misura}} \psi_n \xrightarrow[t=0_+]{F} F=f_n \quad !$$

$$\psi = \sum_n c_n |\psi_n\rangle \xrightarrow{t=0} c_n |\psi_n\rangle \sim |\psi_n\rangle$$

"Nota come $\boxed{\text{---}} \equiv \text{---} f_n$
"Riduzione delle funz. d'onda (collasso)"

Non va considerato come un'evoluzione
fisica. $\Rightarrow$ Contraddizioni/paradossi

D'altra parte, è una condiz. consistenza! **
e.g. Misura di Z . bis

$$\begin{array}{c|c} \text{---} & z_1 \\ \text{---} & z_2 \\ \text{---} & \vdots \end{array}$$

Aspett. probabilistici della prediz. MQ.
(Regole d. Born).

come fatto empirico.

Es. Polarizzazione del fotone.

Classicante:

$$A = A' \mathbf{E} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \text{c.c.}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \left(\begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{k} = (0, 0, k)$$

(i) $\mathbf{E}^{(1)} = (1, 0, 0); \quad \mathbf{E}^{(2)} = (0, 1, 0)$ Polarizz. lineare

(ii) $\mathbf{E}^{(1)} = (\cos \theta, i \sin \theta, 0); \quad \mathbf{E}^{(2)} = (\sin \theta, \cos \theta, 0) \leftarrow \mathbf{E}^{(1)*} \cdot \mathbf{E}^{(2)} = \delta_{ij}$

(iii) Polarizz. circolare.

$$\mathbf{E}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, i, 0); \quad \mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -i, 0)$$

(iv) Polarizz. ellittiche

$$\mathbf{E}^{(1)} = (\cos \theta, i \sin \theta, 0); \quad \mathbf{E}^{(2)} = (\sin \theta, i \cos \theta, 0)$$

Polarizz. lineare con $\mathbf{E}^{(1)} = (1, 0, 0)$ $A = i|A|$

$$\mathbf{E} = \left(\frac{A\omega}{c} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), 0, 0 \right)$$

$$\mathbf{B} = \left(0, \frac{k|A|}{c} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), 0 \right)$$



Lo stato generico di polarizzazione:

$$E = c_1 E^{(1)} + c_2 E^{(2)} \quad \left(|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1 \right)$$

In M.Q. lo stato di polarizzazione

$$\sim |\psi\rangle = c_1 |1\rangle + c_2 |2\rangle$$

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1.$$

Polaroid / o Cristalli con asse di polarizzazione (Tormalina)

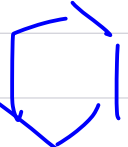
Luce
 $E \uparrow$  $\sim I/I_0 = 1$

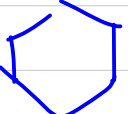
$E \rightarrow$  $\sim I/I_0 = 0$

E at angle θ  $\sim I/I_0 = \cos^2 \theta$

(Legge di Malus)

In MQ

fotone $|1\rangle \rightarrow$  passa

$|2\rangle \rightarrow$  non passa.

$\cos\theta |1\rangle + \sin\theta |2\rangle \rightarrow$  ?

$$(E = h\nu)$$

Il fotone non può spezzarsi. $\Rightarrow$
 L'unica maniera consistente di formulare
 il processo fisico:

$| \psi \rangle$ ha probab. $|c_1|^2 = \cos^2 \theta$ che passa
 " " $|c_2|^2 = \sin^2 \theta$ che non passa.

$I \propto N$ di fotoni $\Rightarrow$

$$I_0 = N$$

$$I = N \cos^2 \theta$$



Legge di Malus.