

Particelle identiche e statistiche di BE/FD

- Simmetrie $\Rightarrow$ Conseguenze.
 - = Conservazioni, $[E, H] = 0$
 - Degenerazioni, e.g. $[J_z, H] = 0$
ma $[J_x, J_y] \neq 0$
 - Parità e parità intrinseca.

- Statistiche: simmetrie per scambi di
particelle identiche.

- Particelle identiche (e.g. elettroni)
hanno identiche proprietà intrinseche, e.g.
la massa, la carica el., il mom. magnetico,
il mom. quadrupolo lo spin, etc. etc.

Non sono distinguibili!

cfr. con M.C. (sopra vale anche i M.C.)

Ma i M.C. le particelle hanno traiettorie
 $r(t)$ ben definite. $\Rightarrow$ Le particelle, anche
se sono identiche, sono distinguibili dalle
posizioni che occupano, i.e., possono essere
numerati, con e.g. $\{r_i(0)\}$

In MQ, $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2 \Rightarrow$

No traiettorie $\boxed{r_i(t)}$ esistono.

Una particella non può avere una posizione (x, y, z) nota con certezza, a meno che abbia l'impulso p totalmente indeterminato.

Vuol dire che all'istante successivo la posiz. della particella è totalmente indeterminata.

Lo stato di due particelle identiche.

$$\psi(\xi_1, \xi_2; t)$$

$$\xi \equiv (r, \sigma)$$

$$\sigma = m = s, s-1, \dots, -s$$

$$\psi(\xi)$$

$$= \begin{pmatrix} \psi_{s, s}(r) \\ \psi_{s-1, s}(r) \\ \vdots \\ \psi_{-s, s}(r) \end{pmatrix} \equiv \psi(r, s_2)$$

$$\psi(\xi_1, \xi_2) \sim e^{i\alpha} \psi(\xi_2, \xi_1)$$

$$(e^{i\alpha})^2 = 1 \Rightarrow e^{i\alpha} = \pm 1$$

Più in generale

$$\psi(\xi_1 \dots \xi_i \dots \xi_j \dots)$$

$$= \pm \psi(\xi_1 \dots \xi_j \dots \xi_i \dots)$$

+ funz. d'onda simmetrica

- " " " antisimmetrica

Discussioni

(1) È legge empirica in MQ non relativistica, che

Le particelle di spin interi $s=0, 1, 2, \dots$ obbediscono
la statistica di Bose-Einstein (BE). Sono
descritte da funz. d'onda totalmente simmetriche
Sono chiamate "bosoni".

Le particelle di spin $s=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ obbed.
alla statistica di Fermi-Dirac (FD). Sono
descritte da funz. d'onda totalmente antisimmetriche
(ogni scambio di due particelle $\Rightarrow (-)$)

(2) In MQ non relativistica, c'è una legge
internamente consistente.

e.g. due nuclei (due atomi, "...")
identici.

Un nucleo con N nucleoni (protoni o
neutrone) ha lo

spin intero se $N = \text{pari} \Rightarrow$ bosone
spin seminteri se $N = \text{dispari} \Rightarrow$ fermione

L'effetto di scambio dei due nuclei,

$$\psi(\xi_1, \dots, \xi_N, \eta_1, \dots, \eta_N; t)$$

$$= (-1)^N \psi(\eta_1, \dots, \eta_N, \xi_1, \dots, \xi_N; t)$$

$(-1)^N = +$ N pari
 $= -$ N dispari

) ok.

- Questa consistenza è sufficiente ma non necessaria.

(e.g. (+) = tutti i casi ?)

(3) In MQ relativistica (teoria di campi relativistici), la CONNESSIONE

SPIN - STATISTICA, segue dai

- principi MQ.
- principi relatività speciale
- principio di positività dell'energia.

(e.g. Libro di Peskin-Schroeder)

cfr. Spin $1/2$ elettrone, protone, ...
 $\Leftarrow$ Eq. di Dirac (Eq. Schr. relativistica)!

(4) $\Psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \sim$ rappresentaz. del gruppo S'_N

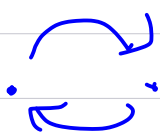
$$S_3: c \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, a \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, b \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \dots$$

$\Psi \sim$ rappresentazione unidimensionale (*)

$$\Psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots) = (-)^{\epsilon} \Psi(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots)$$

$$\begin{cases} = (+) \Psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots) \end{cases}$$

(*) $\Psi \sim$ un numero complesso univocamente definito

(5)  2 scambi $\Rightarrow e^{2i\alpha} = 1 \therefore e^{i\alpha} = \pm 1$

$$\Leftrightarrow \text{diagram with two points and a loop} \Leftrightarrow \pi_1(\mathbb{R}^3/\{0\}) = \mathbb{Z}$$

In 2D $\pi_1(\mathbb{R}^2/\{0\}) \sim \pi_1(S) \sim \mathbb{Z} \Rightarrow$

statistiche più generali: $\Rightarrow$ anioni,
"anyon"

(6) $S = \frac{1}{N!} \sum_P P \rightarrow$ Permutazioni

$$A \equiv \frac{1}{N!} \sum_P \epsilon_P P \quad \epsilon_P = \pm 1 \quad \begin{matrix} \text{permut.} \\ \text{pari} \\ \text{dispari} \end{matrix}$$

$$S^2 = S; A^2 = A, S \cdot A = 0$$

S, A sono operatori di proiezione su stati
simmetrici e antisimmetrici.

$$[S, H] = [A, H] = 0 \Rightarrow \left[\sum_P \frac{e^{-iHt}}{t} \right] = 0$$

⇒ La statistica BE/FD si conserva nel tempo,
 $\langle \psi_s | \psi_s \rangle = 0$

⇒ Tutte le relazioni tal.
completezza, unitarietà ($\sum \text{prob.} = 1$), etc
valgono in due settori matematici.

$|\psi\rangle \sim |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$ Non esiste!

È un esempio di regole di
superselezione.

Regole di selezione.

- Principio di sovrapposizione.

$$\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H} \rightarrow \psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 \in \mathcal{H}.$$

$\rightarrow C_i$ sono eccezioni? $\Rightarrow \boxed{Si}$

N.B. Sotto una rotazione di anglo $\underline{2\pi}$,

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow e^{iJ\omega}\psi \quad |_{|\omega|=2\pi} \\ &= (-)^{2J}\psi = -\psi \quad (J=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots) \\ &\qquad \qquad \qquad \psi \quad (J=0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

N.B. $(-)^{2J} = (-)^{N_F}$ $N_F = \# \text{ di fermioni}$

N.B. N_F è conservato

$$\subseteq \mathbb{N}_F$$

$P_f = \bigcup_{f \in F} P_f$ è superselettivo.

$$N_F \text{ pair} \Rightarrow |B\rangle$$

$$N_F \text{ dispar} \Rightarrow |F\rangle$$

$$|B\rangle + |F\rangle \xrightarrow{2\pi} |B\rangle - |F\rangle$$

Nota $\Rightarrow$

Un altro esempio famoso: la carica elettrica.

$$Q, [Q, H] = 0 \quad \text{la carica el. } e^- \text{ conservata.}$$

$$Q|\psi_1\rangle = q_1|\psi_1\rangle, \quad Q|\psi_2\rangle = q_2|\psi_2\rangle$$

$$q_1 \neq q_2 \rightarrow \cancel{H} \sim c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle$$

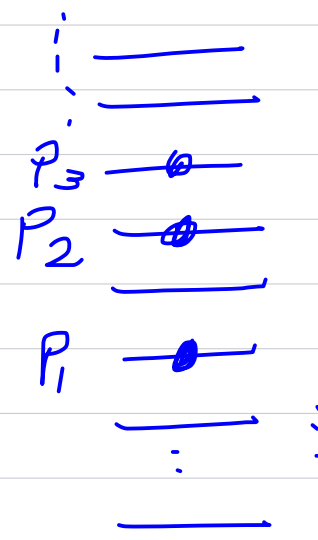
$$\forall A, [A, Q] = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

• L'Energia è SUPERSELETTA?

(7) N fermioni identici (e.g. $N_{\text{elettroni}}$)

debolmente accoppiati $\rightarrow$ la funzione d'onda $\sim$

$$N \cdot \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{\mathcal{P}} \prod_i \psi_{p_i}(\xi_i)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \begin{vmatrix} \psi_{p_1}(\xi_1) & \dots & \psi_{p_1}(\xi_N) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_{p_N}(\xi_1) & \dots & \psi_{p_N}(\xi_N) \end{vmatrix}$$


p_3 —●—
 p_2 —●—
 p_1 —●—
 $\vdots$
 $\vdots$

$= 0$

$p_i = p_j \Rightarrow$ Nessuna coppia di fermioni identici possono occupare lo stesso stato quantistico

"Principio di esclusione" di Pauli.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{\mathcal{P}} |p_1, p_2, \dots, p_N\rangle$$

Conseguenze:

- Tabella periodica degli elem., fisica atomica, fisica nucleare, fisica delle particelle e = tero. fond., astrap., cosmologia, fisica dei stati solidi, quantum computing, ...

2 spin $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \underline{1} \oplus \underline{0}$$

$$\begin{array}{l} \uparrow\uparrow \\ \uparrow\downarrow \\ \downarrow\uparrow \\ \downarrow\downarrow \end{array}$$

$$|11\rangle = \uparrow\uparrow$$

$$|10\rangle = \frac{\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow}{\sqrt{2}}$$

$$|1-1\rangle = \downarrow\downarrow$$

$$|00\rangle = \frac{\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \chi_{1,m} \quad \chi_{0,0} \end{array}$$

Funzione d'onda generica

$$\phi_{A,m}(r_1, r_2) \chi_{1,m} \quad m = 1, 0, -1$$

$$\phi_S(r_1, r_2) \chi_{0,0}$$

Separando le var. d. li

$$R = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad r = r_1 - r_2$$

$$\Psi(r_1, r_2) = \Phi(R) \psi(r)$$

$$\Psi(r_2, r_1) = \Phi(R) \psi(-r)$$

$$\Rightarrow \phi_{A,m}(r_1, r_2) = \Phi_m(R) \psi_{A,m}(r) \quad \psi_{A,m}(-r) = -\psi_{A,m}(r)$$

$$\phi_S(r_1, r_2) = \Phi_0(R) \psi_S(r) \rightarrow \text{sym.}$$

$$0: S_{\text{tot}} = 1$$

$$\psi_m(r) = \sum_{l=\text{dispari}} \sum_{m'} R_{l,m'} Y_{l,m'} \chi_{1,m}$$

$$S_{\text{tot}} = 0$$

$$\psi(r) = \sum_{l=\text{pari}} \sum_{m'} R_{l,m'} Y_{l,m'} \chi_{0,0}$$

N.B.

$$Y_{l,m}(-\hat{r}) = (-1)^l Y_{l,m}(\hat{r})$$

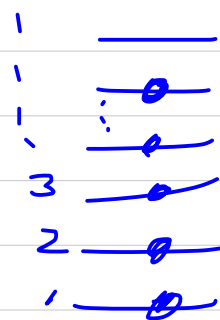
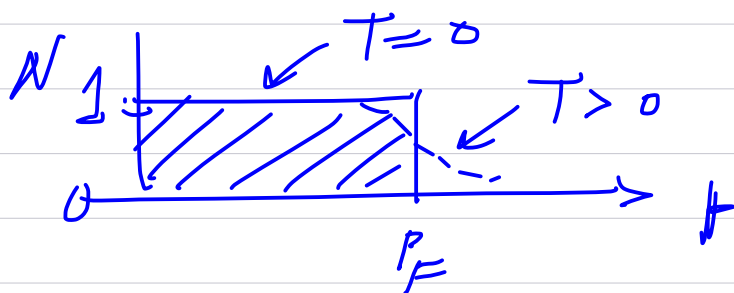
Due bosoni identici di spin 0. (Due pioni π^0)

$$\Psi(r_1, r_2) = \Phi(R) \psi(r)$$

$$BE \Rightarrow \psi(-r) = \psi(r) \quad \therefore$$

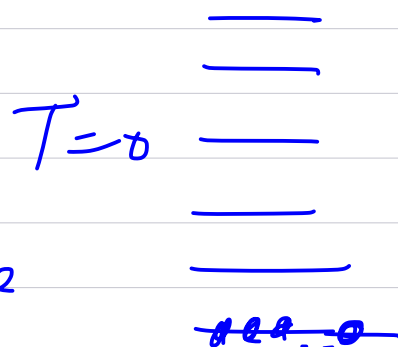
$$\psi(r) = \sum_{l=0,2,4,\dots} R_{l,m}(r) Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

N fermioni identici debolmente accoppiati a $T \approx 0$.



= Gas degenerato di Fermi

N bosoni identici debolmente accoppiati a $T \approx 0$



$\Phi(p) = \#$ di occupazione
 $\Rightarrow \psi(k) = \text{Trasf. Fourier.}$
 = Funzione d'onda
 macroscopica.



$\Rightarrow$

Condensazione di Bose-Einstein
 a $T < T_c$.

Parità e parità intrinseca.

Una particella in $\mathbb{R}^3$ in $V = V(r) \Rightarrow$

$$\psi(r) = \sum R_{\ell,m} Y_{\ell,m}(\hat{r})$$

$$Y_{\ell,m}(-\hat{r}) = (-1)^m Y_{\ell,m}(\hat{r})$$

La parità Π è una simmetria approssimativa della Natura.

Interaz. EM $\checkmark$

" forti $\checkmark$

" gravitazionali $\checkmark$

Interaz. deboli (scambi di W, Z)

NO.

i.e. : inv. μ parità è una proprietà di particolare tipo di interazioni

Parità di una particella

{ Moto orbitale $(-)^L$
Parità intrinseca.

$$P_p = P_n = 1, \quad P_\pi = P_K = -1, \text{ etc}$$

La parità totale del sistema è conservata nei processi forti, EM, e gravitaz.

Operatore di parità.

$$\Pi \psi(r) = \psi(-r)$$

$$\Pi O(r, p) \Pi^{-1} = O(-r, -p)$$

Forma esplicita di Π ?

1D: $\Pi \psi(x) = \psi(-x)$

$$\Pi = e^{i\pi \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 - \frac{\omega}{2} \right] / \omega \hbar}$$

$$\stackrel{m=\omega=1}{=} e^{\frac{i\pi}{2\hbar} (\hat{p}^2 + \hat{x}^2 - \hbar)}$$

$$\rightarrow H \psi_n = (n + \frac{1}{2}) \omega \hbar \psi_n$$

$$\begin{aligned} \Pi \psi(x) &= \Pi \sum_n a_n \psi_n(x) \\ &= \sum_n a_n e^{i\pi n} \psi_n(x) \rightarrow \subset \supset^n \\ &= \sum_n a_n \psi_n(-x) \\ &= \psi(-x) \end{aligned}$$

OK.

$$\Pi O(x, p) \Pi^{-1} = e^{iHt/\hbar} O(x, p) e^{-iHt/\hbar} \Big|_{t=\pi/\omega}$$

$$= O(x_H(t), p_H(t)) \Big|_{t=\pi/\omega} = O(-x, -p)$$

$$e^{i\hat{p}x_0/\hbar} \psi(x) = \psi(x+x_0) \quad \text{OK!}$$

$$e^{iL \cdot \omega} \psi(r) = \psi(Or) \quad \checkmark$$

Parità vs Mom. angolare.

$$V(r) = V(r) \Rightarrow$$

$$[L, H] = 0 \Rightarrow \{L^2, L_z\} \text{ conservato.}$$

$$\psi_{n, l, m}(-r) = (-1)^l \psi_{n, l, m}(r).$$

$$(Y_{l, m}(\hat{r}) = (-1)^l Y_{l, m}(\hat{r}))$$

ma la parità e la conserv. mom. angolare
Non sempre una conseguenza dell'altra.

(i) Parità v Mom. ang. No.

$$V(-r) = V(r) \text{ ma } V(r) \neq V(r).$$

$$V(r) = f(x^2 + 3y^2 + 5z^2).$$

(ii) Parità No Mom. ang. OK. (cf. Int. elettro-debol.)

$$V = g \hat{p} \cdot \hat{s} V(r) + h.c.$$

$$\begin{aligned} \pi \hat{p} \pi^{-1} &= -\hat{p} \\ \pi \hat{s} \pi^{-1} &= \hat{s} \end{aligned} \Rightarrow \pi(\hat{p} \cdot \hat{s}) = -\pi(\hat{p} \cdot \hat{s}).$$

$$\text{ma } [J, H] = 0; \quad J = L + S$$

(iii) Atomi

- approssimazione di elettroni indipendenti
- appross. Hartree (pot. a simmetria centrale e autocompatibile).

$$\Psi(\{r_i\}) = \prod_{n, l, m} \psi_{n, l, m}(r_i)$$

$$\prod \Psi = (-1)^{\sum l_i} \neq (-1)^L \quad \text{in generale.}$$

