

Parte II

13/02/17

- (1) Stati misti e matrice densità.
- (2) Simmetrie in MQ. Teo d Wigner-Eckart.
- (3) Metodi di approssimazione
 - (i) Teo delle perturbazioni;
 - (ii) Metodo variazionale;
 - (iii) Approssimazione semi-classica.
- (4) Particelle cariche in Campo EM.
- (5) Atomi
- (6) Argoment. ulteriori.

Stati misti e matrice densità

In MQ, stati $\sim \psi$ (funz. d'onda).

In realtà ci sono casi in cui tale "descrizione completa"

o non è a ns. disposizione ;

o non è richiesta, e ambidue.

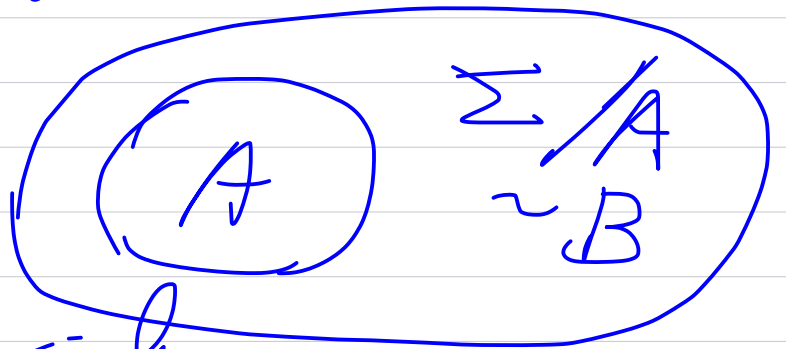
(1) Sistemi macroscopici

$N \sim 10^{23} \rightarrow \psi(r_1, r_2, \dots, r_{10^{23}}) !$

Sono richieste $T, U, \dots$ (media statistica)

(2) Fasci di particelle (e.g. fotoni, elettroni)
non polarizzate o parzialmente polarizzate.

(3) Sistemi composti in cui si ha accesso solo in una parte
(variabili in A)



In tutti questi casi si ha
uno "stato misto" / cfr. stati puri

$\psi \Rightarrow \rho$ (matrice densità)

(4) Una misura incompleta .

$\{F_1, F_2 \dots\}$ osservabili massimali .

$$[F_i, F_j] = 0 .$$

Una misura parziale $\Rightarrow \mathcal{P}$.

" completa $\Rightarrow \mathcal{U}$

(5) Completa misura ma la conoscenza di solo una parte dei risultati

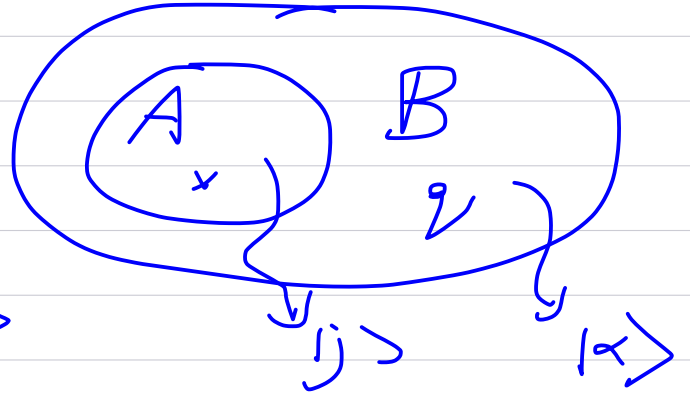
$\Rightarrow$ stati misti

Opert. comuni: manconza (o parziale)
d'informazione completa.
 Formulazione (caso (3).)

$$\Psi(x, y) = \bar{\Psi}_A(x) \bar{\Psi}_B(y)$$

ma

$$|\Psi\rangle = \sum_{j, \alpha} c_{j, \alpha} |j\rangle |\alpha\rangle$$



Il valor medio d'un operatore $\hat{f}_A =$

$$\langle \Psi | \hat{f} | \Psi \rangle = \sum_{j, \alpha; k, \beta} c_{j, \alpha}^* c_{k, \beta} \langle j, \alpha | \hat{f} | k, \beta \rangle$$

$$\Rightarrow \sum_{j, \alpha, k} c_{j, \alpha}^* c_{k, \alpha} \langle j | \hat{f} | k \rangle$$

$$\Rightarrow \sum_{j, k} (\hat{f})_{jk} (\rho)_{kj} = \text{Tr}(\rho \hat{f})$$

dove

$$\rho_{kj} \equiv \sum_{\alpha} c_{k, \alpha} c_{j, \alpha}^*$$

Proprietà di ρ

- (i) $\text{Tr} \rho = 1$
- (ii) $\rho^\dagger = \rho$
- (iii) $0 \leq \rho_{ii} \leq 1$
- (iv) $|\rho_{jk}|^2 \leq \rho_{jj} \rho_{kk}$ ($\det \rho'_{j, k} \geq 0$)

} tutti

La proprietà (iv) si dimostra direttamente.

$$\begin{aligned} P_{jj} P_{kk} - P_{jk} P_{kj} &= \sum_{\alpha, \beta} \left(C_{j\alpha} C_{j\alpha}^* C_{k\beta} C_{k\beta}^* - C_{j\alpha} C_{k\alpha}^* C_{k\beta} C_{j\beta}^* \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} (C_{j\alpha} C_{k\beta} - C_{k\alpha} C_{j\beta}) (C_{j\alpha} C_{k\beta} - C_{k\alpha} C_{j\beta})^* \geq 0. \end{aligned}$$

In uno stato puro,

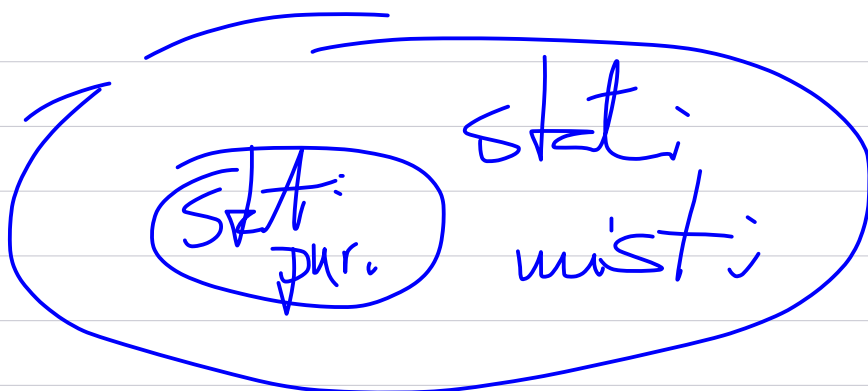
$$C_{j\alpha} \Rightarrow C_j \quad (\text{No } \alpha, \text{ No } \beta)$$

$$P_{jk} = C_j C_k^*$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (P^2)_{ij} &= P_{ik} P_{kj} = \sum_k C_i |C_k|^2 C_j^* \\ &= C_i C_j^* = P_{ij} \end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore P^2 = P \Leftrightarrow \text{stato puro.}}$$

$$P^2 \neq P \Leftrightarrow \text{stato misto}$$



Casi statistici

$W_n \sim$ la prob. che il microsystema sia
in uno stato di H , $\{E_n, |\psi_n\rangle\}$, e

$|\psi_n\rangle = \sum a_{n,i} |i\rangle$ stati in una
base generica

2.g. $W_n = \frac{1}{Z} e^{-E_n/kT}$ (insieme canonico)
 $\Rightarrow$ Il valore medio:

$$\begin{aligned}\langle f \rangle &= \sum_n W_n \cdot \langle n | f | n \rangle = \\ &= \sum_{n,j,k} W_n a_{nj} a_{nk}^* \langle k | f | j \rangle \\ &\equiv \text{Tr}(f \varpi)\end{aligned}$$

dove $\varpi \equiv \mathcal{P} = \sum_n a_{nj} a_{nk}^* W_n$ (matrice
statistica)

Polarizzazione di fotoni

$$| \psi \rangle = c_1 | 1 \rangle + c_2 | 2 \rangle \quad (*) \quad \begin{pmatrix} \text{stato} \\ \text{puro} \end{pmatrix}$$
$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1.$$

Uno stato misto :

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \quad \text{cfr per lo stato puro } (*)$$
$$\rho = | \psi \rangle \langle \psi | = \begin{pmatrix} |c_1|^2 & c_1 c_2^* \\ c_2 c_1^* & |c_2|^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{con } \rho_{11} \rho_{22} - |\rho_{12}|^2 \geq 0,$$

Parametri di Stokes

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix} \quad (*) = \frac{1}{2} (1 + \xi \cdot \sigma)$$

dove

σ = matrici Pauli.

$$\text{con } \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \leq 1.$$

(Intervallo di S^2)
Sfera di Bloch

(i) ~ (iv) $\checkmark$.

$$\sum_{i=1}^3 \xi_i^2 = 1 \Leftrightarrow \text{stato puro.}$$

Significato fisico di ξ_i

Operatore di proiezione sulla polarizz. $|1\rangle$.

$$\Pi_1 \equiv |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle \Pi_1 \rangle = \text{Tr}(\Pi_1 \rho) = \text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\xi_3}{2} & \frac{\xi_1 - i\xi_2}{2} \\ \dots & \frac{1-\xi_3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1+\xi_3}{2}$$

$\therefore -1 \leq \xi_3 \leq 1 \Rightarrow$ Misura della polarizzazione $|1\rangle, |2\rangle$
(grado) lineari

$\xi_3 = 1 \Rightarrow \langle \Pi_1 \rangle = 1$ completa polarizz. $|1\rangle$

$\xi_3 = -1 \Rightarrow \langle \Pi_1 \rangle = 0$
 $\langle \Pi_2 \rangle = 1$ completa polarizz. $|2\rangle$

$$\langle \Pi_2 \rangle = \frac{1-\xi_3}{2} \rightarrow \xi_3 = 0$$

$\xi_i?$ $|1'\rangle \equiv \frac{|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}}; |2'\rangle \equiv \frac{|1\rangle - |2\rangle}{\sqrt{2}}$



$$\Pi_1' \equiv |1'\rangle\langle 1'| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle \Pi_1' \rangle = \text{Tr} \Pi_1' \rho = \frac{1}{4} \text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1-\xi_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1+\xi_1}{2}$$

$$\langle \Pi_2' \rangle = \frac{1-\xi_1}{2}$$

$\left. \begin{array}{l} \langle \Pi_1' \rangle = \frac{1+\xi_1}{2} \\ \langle \Pi_2' \rangle = \frac{1-\xi_1}{2} \end{array} \right\} \xi_1 \text{ è la misura delle piani lineari } 1' \text{ e } 2'$

ξ_2 ? $\Leftrightarrow$ polarizzazioni circolari

$$|\tilde{1}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + i|2\rangle); |\tilde{2}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - i|2\rangle)$$

$$\tilde{\pi}_1 = |\tilde{1}\rangle\langle\tilde{1}| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\langle \tilde{\pi}_1 \rangle = \text{Tr} \tilde{\pi}_1 \rho = \frac{1+\xi_2}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow 1 & \xi_2 = 1 \\ \rightarrow 1/2 & \xi_2 = 0 \\ \searrow 0 & \xi_2 = -1 \end{matrix}$$

$$\langle \tilde{\pi}_2 \rangle = \text{Tr} \tilde{\pi}_2 \rho = \frac{1-\xi_2}{2}$$

N.B. $\rho^2 = \frac{1}{4}(1+\xi \cdot \sigma)(1+\xi \cdot \sigma) = \frac{1}{4}(1+\xi^2 + 2\xi \cdot \sigma)$
 $\Rightarrow$ so $\xi^2 = 1$ $\frac{1}{2}(1+\xi \cdot \sigma) = \rho$

$\therefore$ sfera d. Bloch $\xi^2 = 1 \Rightarrow$ stato puro.
 $\xi^2 < 1$ misto.

$$\xi_i = 0 \quad i=1,2,3 \Rightarrow$$

$$\langle \pi_1 \rangle = \langle \pi_1' \rangle = \langle \tilde{\pi}_1 \rangle = \dots = 1/2$$

$\therefore$ Un fascio non polarizzato.

(completa ignoranza, tutte le polarizz. ugualmente probabili)

N.B.

$$|1\rangle = |1\rangle, |2\rangle = |2\rangle \quad \text{Sp} \approx 1/2$$

✓

Es. Un'applicazione: sistema di due spin $1/2$ che sono prodotti di decadimento.



$$|\psi_1\rangle = \frac{|\uparrow\uparrow\rangle + 2|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{6}}$$

Per l'osservatore A che è in grado di misurare lo spin A, $\hat{F} = S_{Az}, S_{Ax}, S_{Ax}^2 - S_{Ay}^2$, etc

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 | \hat{F} | \psi_1 \rangle &= \frac{1}{6} \langle \uparrow\uparrow + 2\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow | \hat{F} | \uparrow\uparrow + 2\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow \rangle \\ &= \frac{1}{6} (f_{11} + 4f_{11} - 2f_{12} - 2f_{21} + f_{22}) \\ &= \frac{1}{6} (5f_{11} - 2f_{12} - 2f_{21} + f_{22}) \\ &= \text{Tr}(\hat{F} \rho) \end{aligned}$$

con $\rho = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\rho^2 \neq \rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1-\xi_3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1+\xi_3}{2} = \frac{5}{6}; \quad \xi_3 = \frac{2}{3}$$

$$\xi_2 = 0$$

$$\xi_1 = -2/3$$

$$\left(\xi_1^2 = \frac{8}{9} \right) < 1$$

stato misto

$$l.g \quad |\psi_2\rangle = \frac{\uparrow\uparrow + 2\uparrow\downarrow}{\sqrt{5}} =$$

$$\langle\psi_2|f|\psi_2\rangle = \frac{1}{5} \langle\uparrow\uparrow + 2\uparrow\downarrow|f|\uparrow\uparrow + 2\uparrow\downarrow\rangle \\ = \frac{1}{5}(f_{11} + 4f_{11}) = f_{11} = \text{Tr}(f\rho)$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho^2 = \rho \quad \underline{\text{stat pmo.}}$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{2\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow}{\sqrt{5}}$$

$$\langle\psi_3|f|\psi_3\rangle = \frac{1}{5} \langle 2\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow | f | 2\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow \rangle \\ = \frac{1}{5} (4f_{11} - 2f_{12} - 2f_{21} + f_{22}) = \text{Tr}(f\rho)$$

$$\rho = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \rho^2 = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \underline{\text{stat pmo.}} \quad = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \rho$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\uparrow - \downarrow\downarrow)$$

$$\Rightarrow \langle\psi_4|f|\psi_4\rangle = \frac{1}{2} \langle \uparrow\uparrow - \downarrow\downarrow | f | \uparrow\uparrow - \downarrow\downarrow \rangle$$

$$= \frac{1}{2}(f_{11} + f_{22}) = \text{Tr}(f\rho)$$

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho^2 \neq \rho \quad \underline{\text{not}}$$

- Stati puro vs stati misto / criterio
- Fattorizzazione vs Entanglement.

Casi $|\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle$ (stati puri).

$\Leftarrow$ Funz. d'onda fattorizzata !

$$|\psi_2\rangle = |\uparrow\rangle \otimes \frac{|\uparrow\rangle + 2|\downarrow\rangle}{\sqrt{5}} \quad \text{Per l'osservazione A} \sim |\uparrow\rangle$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{2|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{\sqrt{5}} \otimes |\downarrow\rangle \sim \frac{2|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{\sqrt{5}}$$

$|\psi_1\rangle$ e $|\psi_4\rangle$ non possono essere scritti

come $|A\rangle \otimes |B\rangle$:

spin A e spin B sono correlati:
(entanglement)

Entanglement quantistico ($\Rightarrow$ dopo)

$$|\Psi_0\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

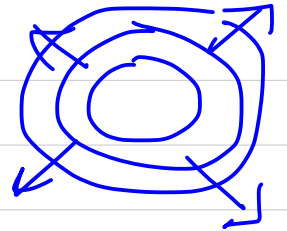
$$S_{\text{tot}} = 0$$



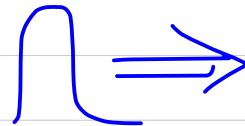
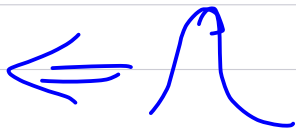
$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = 0$$

$$\psi_{orb}(r) = \psi_0(r) \sim \frac{e^{ikr}}{r}$$



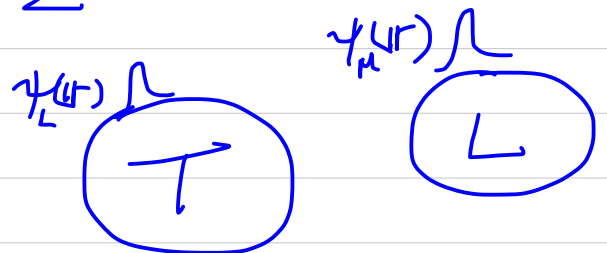
$$\Psi = \psi_0(r) \frac{\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow}{\sqrt{2}}$$



cfr Due elettroni 1 nel laboratorio (L)
1 sulla luna. (M)

$$\Psi = \frac{\psi_L(r_1)\psi_M(r_2)\uparrow\downarrow - \psi_M(r_1)\psi_L(r_2)\downarrow\uparrow}{\sqrt{2}}$$

FD $\rightarrow$



1, 2 Laboratorio Pisa

2nd termine $\ll$ 1 termine

$$\Psi \sim \psi_L(r_1)|\uparrow\rangle \otimes \psi_M(r_2)|\downarrow\rangle - \dots$$

$$\sim \psi_L(r_1)|\uparrow\rangle$$

Obediscono
le statistiche FD ma non sono "entangled"
Praticamente fattorizzabili

