

Simmetrie / Teo d-Wigner-Eckart.

Simmetrie in Natura e simmetrie in MQ.

- Nasce da varie forme particolari in Natura.
p.g. forme quasi perfettamente rotonde (luna?)
forme "simmetriche" dei corpi biologici,
cristalli di ghiaccio, altri cristalli in
natura.
- Da ns antichi $\rightarrow$ nostre infanzia
Esperienze di meraviglie, Sens di bellezza.
...
- $\Rightarrow$ Concetti matematici di geometrie,
teoria dei gruppi, etc. nascono
dai tentativi di estrarre l'essenza di
questi fenomeni e dare un formalismo
astratto a queste idee.
- $\Rightarrow$ Simmetrie come nozione di fisico.

- In fisica, le leggi, la dinamica - l'equazione del moto, e la descrizione dello stato, utilizzano le variabili (la posizione, la velocità, l'impulso, etc.).

In generale, la scelta di particolare coordinate, è arbitraria. Lo stesso sistema può essere descritto utilizzando un'altra scelta di variabili. L'idea di cambio delle variabili. Ora, in generale, l'equazione del moto = legge dinamica del sistema, cambia forma.

Quando l'eq. del moto* non cambia la forma, si ha una simmetria.

eg. l'eq. che descrive un cerchio,

$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x'^2 + y'^2 = 1.$

* più generale, la descrizione del sistema.

In MQ.

le variabili dinamiche $\leftrightarrow$ operatori a.a. $\hat{O}$
lo state $\leftrightarrow |\psi\rangle$

Cambiamento di variabili $\leftrightarrow$

Trasformazione Unitaria

$$\hat{O} \rightarrow U \hat{O} U^\dagger \quad \forall \hat{O}$$

$$|\psi\rangle \rightarrow U |\psi\rangle \quad \forall |\psi\rangle$$

Equazioni del moto $\leftrightarrow H$

"Invarianza" dell'equazione del moto

$$\Leftrightarrow [U, H] = 0; \quad U H U^\dagger = H$$

$\Leftrightarrow$ Una simmetria

e.g.

$$U = e^{-i \hat{p} \cdot \mathbf{r}_0 / \hbar}$$

$$U H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) U^\dagger = H(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0, \mathbf{p})$$

$$H(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0, \mathbf{p}) = H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \Leftrightarrow$$

$$U H U^\dagger = H \\ U H = H U.$$

$$[\hat{p}, H] = 0 \Rightarrow \hat{p} \text{ conservato.}$$

Simmetria $\hat{=} MQ \Rightarrow$.

- (1) Conservazione di cariche :
- (2) Degenerazioni dei livelli energetici.
- (3) Relazioni esatte tra le ampiezze/
elementi di matrice :

Teo. di Wigner-Eckart.

- (4) Simmetrie "rotte spontaneamente"
 - simmetria è la Nambu-Goldstone
 - sistemi di ∞ grad. di libertà.

- (5) Simmetrie di gauge locale
fr. accoppiamento locale. forma delle
 $\Rightarrow$ Principio di gauge $\Rightarrow$ interazioni
 $\Rightarrow$ Modello standard delle interazioni fondamentali
(le interazioni forti e elettrodeboli.)

- (6) Tipi diversi di simmetrie.
 - (i) Simmetrie continue / discrete
 - (ii) interne e spazio-temporale.

- (7) $T, C, CP, CPT \dots$

Conseguenze.

(1) Conservazione della carica

$$U = e^{iG\alpha} \quad [U, H] = 0 \Rightarrow [G, H] = 0$$

$$t=0 \quad G \psi(0) = g_0 \psi(0) \Rightarrow$$

$$G \psi(t) = G e^{-iHt/\hbar} \psi(0) = g_0 \psi(t).$$

$$\langle \psi(t) | G | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | G | \psi(0) \rangle.$$

$$G \psi_n = g_n \psi_n \Rightarrow \dot{g}_n = 0.$$

(2) Degenerazione

$$[G_i, H] = 0, \quad i=1, 2, \dots$$

$$\text{ma } [G_i, G_j] \neq 0 \quad (i \neq j) \Rightarrow$$

$$H \psi_n = E_n \psi_n$$

$$G_i \psi_n = g_i \psi_n$$

$$H(G_2 \psi_n) = G_2 H \psi_n = E_n (G_2 \psi_n)$$

$$G_2 |\psi_n\rangle \text{ e' autostato di } H \text{ con } E_n(?)$$

$$\Rightarrow - G_2 |\psi\rangle = 0$$

$$- G_2 |\psi\rangle \propto \psi$$

$$- G_2 |\psi\rangle \propto |\psi\rangle$$

oppure $\Rightarrow G_2 |\psi\rangle, |\psi\rangle$ stati distinti

$\Rightarrow$ Degenerazione.

e.g. multiplets di mono. angolare.

$$[H, J_i] = 0 \quad (\text{Sistema inv. x rotaz. 3D})$$

$$[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k.$$

$$|l\rangle \rightarrow |l, j, m\rangle$$

$$J^2 |l, j, m\rangle = j(j+1) |l, j, m\rangle$$

$$J_z |l, j, m\rangle = m |l, j, m\rangle$$

$$J_x |l, j, m\rangle \neq |l, j, m\rangle \Rightarrow \underline{\text{Degenerazione}}$$

Degeneraz.

$$|l, j, j\rangle$$

$$|l, j, j-1\rangle$$

$$\vdots$$

$$|l, j, -j\rangle$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2j+1 \\ \text{stati} \end{array} \right.$$

Atomo di idrogeno.

Livello n

$$\Rightarrow \# = n^2 = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) \rightarrow \text{Degeneraz. caratteristici}$$

Oscillatore armonico 3D.

$$N = \{n_1, n_2, n_3\} \quad n_1 + n_2 + n_3 = N \Rightarrow \# = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$$

$$E_N = \omega \hbar (n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2})$$

$$l = 0, 2, \dots, N$$

$$1, 3, \dots, N-1$$

(3) Relazioni esatte tra le ampiezze: Teo. di Wigner-Eckart.

$$\psi_0(r) = e^{-r/a} \rightarrow L^? \\ L=0!$$

$$\therefore \hat{L}_z \psi_0 = 0 \quad \hat{L}^2 \psi_0 = 0$$

$$\psi_1(r) = \cos t \times e^{-r/a} \quad L^?$$

$$L=1! \quad x = r \cdot \frac{x}{r} = r(Y_{1,-1} + Y_{1,1})$$

$$\psi_2(r) = x^2 e^{-r/a} \quad ? \quad L=0, 2.$$

$$\psi_4 = xy e^{-r/a} \quad ? \quad L=2, \text{ etc.}$$

$$\tilde{\psi}(r) = \hat{p}_x e^{-r/a}, \quad L=1!$$

$$1 \rightarrow e^{iJ \cdot \omega} 1 e^{-iJ \cdot \omega}$$

$$|4\rangle \rightarrow e^{iJ \cdot \omega} |4\rangle$$

In particolare, uno stato di J, M definito

$$|J, M\rangle \rightarrow e^{iJ \cdot \omega} |J, M\rangle = \sum_{M'} D_{M'M}^J e^{iJ \cdot \omega} |J, M'\rangle$$

$$|l, m\rangle \rightarrow e^{iL \cdot \omega} |l, m\rangle = \sum_{m'} D_{m'm}^l(\omega) |l, m'\rangle$$

Legge di trasformazione di stati di mom. ang.
definita
 Veri cor. 21/11/16.

matrice di rotaz. per $sp\ 1/2$.

$$e^{iS_z \alpha} = e^{i\frac{\sigma_z}{2} \alpha} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} = U_z(\alpha)$$

$$e^{i\frac{\sigma_y}{2} \beta} = e^{i\frac{\beta}{2} \sigma_y} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & \sin \frac{\beta}{2} \\ -\sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} = U_y(\beta)$$

$$D^{1/2}_{m' m}(\alpha, \beta, \gamma) = U_z(\gamma) U_y(\beta) U_z(\alpha)$$

Tensori sferici

Def. A_i ($i=x, y, z$) è un vettore.

$$\Leftrightarrow T_0^1 \equiv A_z; \quad T_1^1 = -\frac{A_x + iA_y}{\sqrt{2}}, \quad T_{-1}^1 = \frac{A_x - iA_y}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{A_z = T_0^1; \quad A_x = \frac{T_{-1}^1 - T_1^1}{\sqrt{2}}; \quad A_y = i \frac{T_1^1 + T_{-1}^1}{\sqrt{2}}}$$

$$\text{cfr. } Y_{10} \propto \frac{z}{r} \quad Y_{1-1} = \frac{x-iy}{\sqrt{2}}, \quad Y_{11} = -\frac{x+iy}{\sqrt{2}}$$

Tensori sferici di rango 2 $\Leftrightarrow A_{ij}, \sum A_{ii} = 0$

$$\begin{cases} T_0^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(A_{xx} + A_{yy} - 2A_{zz}) \\ T_{\pm 1}^2 = \mp(A_{xz} \pm iA_{yz}) \\ T_{\pm 2}^2 = \frac{1}{2}(A_{xx} - A_{yy} \pm 2iA_{xy}) \end{cases}$$

etc.

$\Rightarrow$ Nota.

In generale, per ogni stato e per ogni operatore,

$$| \psi \rangle \rightarrow e^{i \vec{J} \cdot \vec{\omega}} | \psi \rangle$$

$$\hat{O} | \psi \rangle \rightarrow e^{i \vec{J} \cdot \vec{\omega}} \hat{O} | \psi \rangle$$

$$= \underbrace{e^{i \vec{J} \cdot \vec{\omega}}}_{\text{}} \underbrace{\hat{O} e^{-i \vec{J} \cdot \vec{\omega}}}_{\text{}} \underbrace{e^{i \vec{J} \cdot \vec{\omega}}}_{\text{}} | \psi \rangle$$

• ora i part. chi. rot. ($J=1, 2, 3, \dots$) si trasf.

in maniera semplice e universale,

$$e^{i \vec{J} \cdot \vec{\omega}} | j, m \rangle = \sum_{m'} D_{m' m}^j(\omega) | j, m' \rangle$$

matrici di rotazione

• I part. chi. rot., operatori tensori sferici T_m^j si trasformano in maniera semplice e universale,

$$T_m^j \rightarrow e^{i \vec{J} \cdot \vec{\omega}} T_m^j e^{-i \vec{J} \cdot \vec{\omega}} = \sum_{m'} D_{m' m}^j T_{m'}^j$$

Nota. Tensori sf. di rango 1 $\Leftrightarrow$ tensori sf. di rango 2.

Tensori cartesiani $\Leftrightarrow$ tensori cart. di rango 2

$$\{A_x, A_y, A_z\}, \{B_x, B_y, B_z\}$$

$$\Rightarrow \frac{A_i B_j + A_j B_i}{2} \equiv C_{ij} \text{ (Def.)}$$

Tensori sferici di rango superiori sono costruiti a partire da quelli "più bassi", con la regola di composizione dei prodotti di stat. d. momento angolare, i.e., in termini di coefficienti di C-G. !

$$A_i \Leftrightarrow T'_m \quad ; \quad B_j \Leftrightarrow \tilde{T}'_m$$

$$\text{E.g. } T_0^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (T_1^1 \tilde{T}_0^1 + T_0^1 \tilde{T}_1^1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{A_x + iA_y}{\sqrt{2}} B_z - A_z \frac{B_x + iB_y}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \{ A_x B_z + A_z B_x + i(A_y B_z + A_z B_y) \}$$

$$\equiv - (C_{xz} + i C_{yz}) \quad \checkmark !$$

Andegamente,

$$1 \otimes 1 = 2 \otimes \dots$$

$$T_0^2 = \frac{1}{\sqrt{6}} T_1 \tilde{T}_1 + \sqrt{\frac{2}{3}} T_0 \tilde{T}_0 + \frac{1}{\sqrt{6}} T_{-1} \tilde{T}_{-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(-\frac{A_x + iA_y}{\sqrt{2}} \frac{B_x - iB_y}{\sqrt{2}} \right) + \sqrt{\frac{2}{3}} A_z B_z + \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{A_x - iA_y}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{B_x + iB_y}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}} A_x B_x - \frac{1}{\sqrt{6}} A_y B_y + \sqrt{\frac{2}{3}} A_z B_z$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}} (C_{xx} + C_{yy} - 2 C_{zz})$$

OK.

$$T_2^2 = \dots$$

$$= \frac{1}{2} (C_{xx} - C_{yy} + 2i C_{xy})$$

trans sferico

$$T_q^p |j, m\rangle \rightarrow \underbrace{e^{i\vec{J} \cdot \omega}}_T T_q^p e^{-i\vec{J} \cdot \omega} e^{i\vec{J} \cdot \omega} |j, m\rangle$$

$$= \sum_{q', m'} D_{q' q}^p D_{m' m}^j \underbrace{T_{q'}^p}_{(*)} |j, m'\rangle$$

$\therefore T_q^p |j, m\rangle$ si trasforma esattamente come
 $|p, q\rangle |j, m\rangle$,

$$\rightarrow e^{i(\vec{J}_1 + \vec{J}_2) \cdot \omega} |p, q\rangle |j, m\rangle$$

$$= e^{i\vec{J}_1 \cdot \omega} |p, q\rangle \otimes e^{i\vec{J}_2 \cdot \omega} |j, m\rangle$$

$$= \sum_{q'} D_{q' q}^p(\omega) |p, q'\rangle \otimes \sum_{m'} D_{m' m}^j(\omega) |j, m'\rangle$$

$$= \sum_{q', m'} D_{q' q}^p(\omega) D_{m' m}^j(\omega) \cdot |p, q'\rangle |j, m'\rangle \quad (**)$$

segue che l'elemento d-matrice

$$\langle J, M | T_q^p | j, m \rangle$$

$$\propto \langle J, M | p, q; j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle : \text{C-G !}$$

Teo Wigner-Eckart:

$$\langle J, M; \alpha | T_q^P | j, m; \beta \rangle$$
$$= \underbrace{\langle JM | P, q; j, m \rangle}_{C-G} \underbrace{\langle J, \alpha | T^P | j, \beta \rangle}_{\text{l'elemento di matrice ridotto}}$$

- Il coeff. di proporzionalità (dipende da J, α, P, j, β)
- Tutte le dipendenze da M, q, m sono nelle C-G, che sono universali . !
- W-E $\Rightarrow$ relazioni tra le ampiezze, senza la conoscenza dei dettagli dinamici del particolare sistema considerato.

Es. 1 Atomo di idrogeno in campo elettrico esterno.

$$V = e\mathcal{E}y \quad (E = (0, \mathcal{E}, 0))$$

$$= i(T'_1 + T'_{-1}) \quad \left\{ \begin{array}{l} T'_1 = -\frac{x+iy}{\sqrt{2}} e\mathcal{E}; T'_{-1} = \frac{x-iy}{\sqrt{2}} e\mathcal{E} \\ T'_0 = z \cdot e\mathcal{E} \end{array} \right\}$$

Elementi di matrice di V tra gli stati d-H

$$\langle n' l' m' | V | n, l, m \rangle$$

$$= \langle n' l' | T | n, l \rangle \cdot \left\{ \begin{array}{l} \langle l' m' | 1, 1; l, m \rangle \\ + \langle l' m' | 1, -1; l, m \rangle \end{array} \right\}$$

↑ C-G.

$$= 0 \quad \begin{array}{l} \text{se } m' \neq m \pm 1 \\ \text{se } l' \neq l \pm 1, \quad \times \leftarrow \text{parità} \end{array}$$

e.g. $\frac{\langle 4, l+1, m+1 | V | 3, l, m \rangle}{\langle 4, l+1, m-1 | V | 3, l, m \rangle} = \frac{\langle l+1, m+1 | 1, 1; l, m \rangle}{\langle l+1, m-1 | 1, -1; l, m \rangle}$

$\left\{ \begin{array}{l} l=1 \\ m=1 \end{array} \right\} \quad \frac{\langle 4, 2, 2 | V | 2, 1, 1 \rangle}{\langle 4, 2, 0 | V | 2, 1, 1 \rangle} = \frac{\langle 2, 2 | 1, 1; 1, 1 \rangle}{\langle 2, 0 | 1, -1; 1, 1 \rangle} = \frac{1}{1/6} = \sqrt{6}$

$\left\{ \begin{array}{l} l=2 \\ m=1 \end{array} \right\} \quad \frac{\langle 4, 3, 2 | V | 3, 2, 1 \rangle}{\langle 4, 3, 0 | V | 3, 2, 1 \rangle} = \frac{\langle 3, 2 | 1, 1; 2, 1 \rangle}{\langle 3, 0 | 1, -1; 2, 1 \rangle} = \frac{\langle 3, 2 | 2, 1; 1, 1 \rangle}{\langle 3, 0 | 2, 1; 1, -1 \rangle}$

$$= \frac{\sqrt{2/3}}{\sqrt{1/5}} = \sqrt{10/3}$$

N.B. $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J, M \rangle = (-1)^{j_1-j_2} \langle j_2 m_2 j_1 m_1 | J, M \rangle$

Elemento di matrice ridotto: un esempio

$$V = eE y$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}} (T'_+ + T'_-)$$

$$T'_+ = -\frac{x+iy}{\sqrt{2}} eE$$

$$T'_- = \frac{x-iy}{\sqrt{2}} eE$$

nlm
 @ $\langle 3, 2, 0 | V | 2, 1, 1 \rangle$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}} \langle 3, 2, 0 | T'_+ | 2, 1, 1 \rangle$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}} \langle 2, 0 | 1, -1; 1, 1 \rangle \underbrace{\langle 3, 2 || T'_+ || 2, 1 \rangle}_?$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \langle 3, 2 || T'_+ || 2, 1 \rangle$$

$$= \frac{i}{2\sqrt{3}} \langle 3, 2 || T'_+ || 2, 1 \rangle$$

$$0 = eE \int d\mathbf{r} R_{3,2}(r) Y_{2,0}^*(\theta, \varphi) y R_{2,1}(r) Y_{1,1}(\theta, \varphi)$$

$$= eE \int_0^\infty dr r^3 R_{3,2}(r) R_{2,1}(r) \int d\Omega Y_{2,0}^* \sin\theta Y_{1,1}$$

$$= eE \cdot \int dr r^3 R_{3,2}(r) R_{2,1}(r)$$

$$\cdot \int d\Omega \left(\frac{\sqrt{5}}{4\pi} \left(\frac{3}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2} \right) \sin\theta \left(\frac{\sqrt{3}}{8\pi} \sin\theta \right) \right)$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi e^{i\varphi}$$

$$= eE \cdot \frac{165888}{15625\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{6\pi} \cdot i\pi$$

$$= ieE \frac{27648\sqrt{2}}{15625\sqrt{5}}$$

$$= \frac{i}{2\sqrt{3}} \langle 3, 2 || T' || 2, 1 \rangle$$

$$\therefore \langle 3, 2 || T' || 2, 1 \rangle$$

$$= \frac{55296 i \sqrt{\frac{2}{5}}}{15625} eE r_B \quad (*)$$

Una volta noto (*)

$$\begin{aligned} & \overset{n \text{ lu}}{\langle 3, 2, -1 | V | 2, 1, 0 \rangle} \quad \swarrow \overset{n \text{ lu}}{\langle 3, 2, 0 | V | 2, 1, 1 \rangle} \\ & \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}} \langle 3, 2, -1 | (T'_+ + T'_-) | 2, 1, 0 \rangle$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}} \langle 3, 2, -1 | T'_- | 2, 1, 0 \rangle$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}} \langle 2, -1 | 1, -1; 1, 0 \rangle \langle 3, 2 || T' || 2, 1 \rangle$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (*) = - \frac{27648}{15625} eE r_B \quad !$$