

Particelle cariche ed interazioni elettromagnetiche e M.Q.

Ci sono due aspetti.

- (i) $[E, B]$ generat.: dalla distribuzione di carica elettrica e corrente: j (Pot. Liénard-Wiechert)
- (ii) Moto di particelle cariche in campo esterno E, B ;
- (iii) In realtà vanno trattati unitariamente,
 $\underbrace{\phi(x), \psi(x) \dots}_{\text{materie}}, \underbrace{A(x)}_{\text{interagenti}} (\equiv \{A, \phi\})$

⇒ Teorie di campi quantistici
(Elettrodin. quantistica, teoria standard delle interaz. elettrodeboli, e delle inter. forti)

Tuttavia, ci sono casi in cui è una buona approssimazione trattare il campo EM come campo (potenziale) esterno, classico, e studiare il moto quantistico della particella

Particella carica e campo EM esterno (classico)

$$H = \frac{1}{2m} \left(p - \frac{q}{c} A \right)^2 + q\phi - \mu \cdot B$$

"accoppiamento minimale"

→ mom. magnetico

Significato fisico dell'elettromagnetismo in MQ

$$\sim \exp \left[\frac{iq}{\hbar c} \int dx^\mu A_\mu \right]$$

T.T. Wu
C.N. Yang

$(E, B) \Leftrightarrow (A, \phi)$
 attributo canonico EM. in accoppiamento minimale
 ma ridondante.

Campo EM generato da cariche \Rightarrow
 Equazioni di Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \Rightarrow$$

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j}); \quad F^{0i} = -E^i, \quad F^{ij} = \epsilon_{ijk} B_k$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0 \\ \nabla \cdot B = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Faraday} \\ \text{Bianchi} \end{array} \quad \left(\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \times B = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\ \nabla \cdot E = 4\pi \rho \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{No monopoles magnetic} \\ \text{Biot-Savart} \\ \text{Gauss} \end{array}$$

Le prime due eq. Maxwell risolte da:

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{cases} \quad (18.)$$

La parametrizzazione (18.) è ridondante.

\mathbf{B}, \mathbf{E} in var. di gauge -

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla f$$

In presenza di (ρ, \mathbf{j}) t. da $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$

è conveniente prendere la gauge di

Lorentz, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ e $\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

Eq. di Maxwell diventano

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

⇒ Solu (Lienard-Wiechert) $\left. \begin{matrix} \text{dupl} \\ \text{L.V.} \\ 2 \end{matrix} \right\}$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Big|_{t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Big|_{t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}}$$

$\vec{E}, \vec{B} (A, \phi) \Rightarrow$ Moto di una particella

$$m \dot{\vec{r}} = q \vec{E} + \frac{q}{c} (\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) \quad \text{forze di Lorentz}$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + \frac{q}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} - q \phi$$

$$\vec{p} = \frac{dL}{d\dot{\vec{r}}} = m \dot{\vec{r}} + \frac{q}{c} \vec{A}$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{1}{m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)$$

$$\rightarrow H = \sum p_i \dot{r}_i - L$$

$$= \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q \phi \quad \checkmark$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(p - \frac{q}{c} A \right)^2 \psi + V(r) \psi \quad (\phi = 0)$$

Se $\psi_0(r, t)$ soddisfa

$$i\hbar \frac{\partial \psi_0(r, t)}{\partial t} = \left(\frac{p^2}{2m} + V(r) \right) \psi_0(r, t)$$

(moto senza il campo magnetico) A (cost)

allora

$$\psi(r, t) = e^{\frac{iq}{c} \int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}')} \psi_0(r, t)$$

soddisfa
$$i\hbar \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} = \left(\frac{\left(p - \frac{q}{c} A \right)^2}{2m} + V(r) \right) \psi(r, t).$$

Più è grande

$$\exp \frac{iq}{c} \int dx^i A_i \sim \frac{\text{effetto del}}{\hbar} \sim \frac{Mq}{\hbar}.$$

Eq. Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H \psi$$
$$= \left[\frac{1}{2m} \left(p - \frac{q}{c} A \right)^2 + q\phi \right] \psi$$

$\underbrace{\quad}_{-u \cdot B}$

Sotto la transf. di gauge

$$\left. \begin{aligned} A &\rightarrow A + \nabla f \\ \phi &\rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Equazione} \\ \text{cambia} \\ \text{forma!} \end{array}$$

Esiste una gauge "privilegiata"?
La soluzione cambia, con una trasformazione di gauge?

Risposta:

Ans.
=

Trasf. di gauge delle funz. d'onda!

$$\psi \rightarrow e^{i\frac{q}{\hbar}f} \psi$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \Rightarrow e^{i\frac{q}{\hbar}f} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + e^{i\frac{q}{\hbar}f} \left(-\frac{q}{c} \frac{\partial f}{\partial t}\right) \psi \quad \checkmark$$

$$\text{sul 2° membro: } q\phi \Rightarrow q\phi - \frac{q\partial f}{c\partial t} \quad \checkmark$$

$$\frac{\left(p - \frac{q}{c}A\right)^2 \psi}{2m} \rightarrow \frac{\left[p - \frac{q}{c}A + \nabla f\right]^2 e^{i\frac{q}{\hbar}f} \psi}{2m}$$

$$\text{ora: } p\left(e^{i\frac{q}{\hbar}f} \psi\right) = e^{i\frac{q}{\hbar}f} p\psi + \underbrace{\frac{q}{\hbar} \nabla f}_{\text{}} e^{i\frac{q}{\hbar}f} \psi$$

$$\therefore \left[p - \frac{q}{c}(A + \nabla f)\right] e^{i\frac{q}{\hbar}f} \psi$$

$$= e^{i\frac{q}{\hbar}f} \left[\left(p - \frac{q}{c}A\right) \psi\right]$$

$$\left[p - \frac{q}{c}(A + \nabla f)\right]^2 e^{i\frac{q}{\hbar}f} \psi$$

$$= e^{i\frac{q}{\hbar}f} \left(p - \frac{q}{c}A\right)^2 \psi$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \quad \Rightarrow$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \quad \text{nella nuova gauge!}$$

⇒ Il risultato fisico non dipende dalla gauge.

La densità di corrente

$$\rho = \psi^* \psi$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi = \left[\frac{1}{2m} (\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A})^2 + q\phi \right] \psi$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[\psi^* i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - (-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t}) \psi \right]$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \left[\psi^* \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A})^2 \psi - \frac{(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A})^{*2}}{2m} \psi^* \psi \right]$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} \left[\psi^* \left(\nabla - \frac{iq}{c\hbar} \mathbf{A} \right)^2 \psi - \left(\nabla + \frac{iq}{c\hbar} \mathbf{A} \right)^2 \psi^* \psi \right]$$

$$\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} = -i\hbar \left(\nabla - \frac{iq}{c\hbar} \mathbf{A} \right)$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} \nabla \cdot \left[\psi^* \left(\nabla - \frac{iq}{c\hbar} \mathbf{A} \right) \psi - \left(\nabla + \frac{iq}{c\hbar} \mathbf{A} \right) \psi^* \psi \right]$$

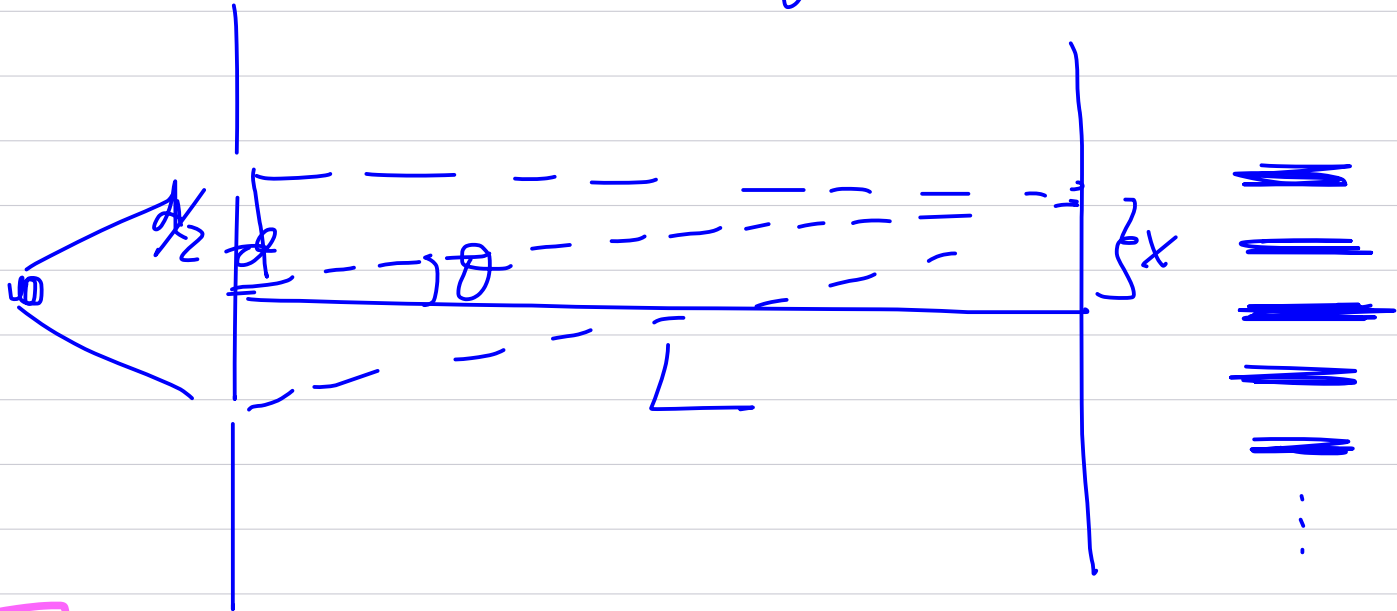
$$\equiv -\nabla \cdot \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2m} \left\{ \left(\nabla + \frac{iq}{c\hbar} \mathbf{A} \right) \psi^* \psi - \psi^* \left(\nabla - \frac{iq}{c\hbar} \mathbf{A} \right) \psi \right\}$$

$$= \frac{1}{2m} \left\{ \psi^* (\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A}) \psi + (\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A})^* \psi^* \psi \right\}$$

Effetto Aharonov-Bohm. (1959)

Esperimento à la Young.



$\delta =$ Diff. lunghezza percorsi

$$= 2 \cdot \frac{d}{2} \sin \theta \approx d \cdot \theta \approx d \cdot \frac{x}{L}$$

$$= n \lambda \quad : \text{interf. positiva}$$

$$= \frac{2n+1}{2} \lambda \quad \text{" negativa}$$

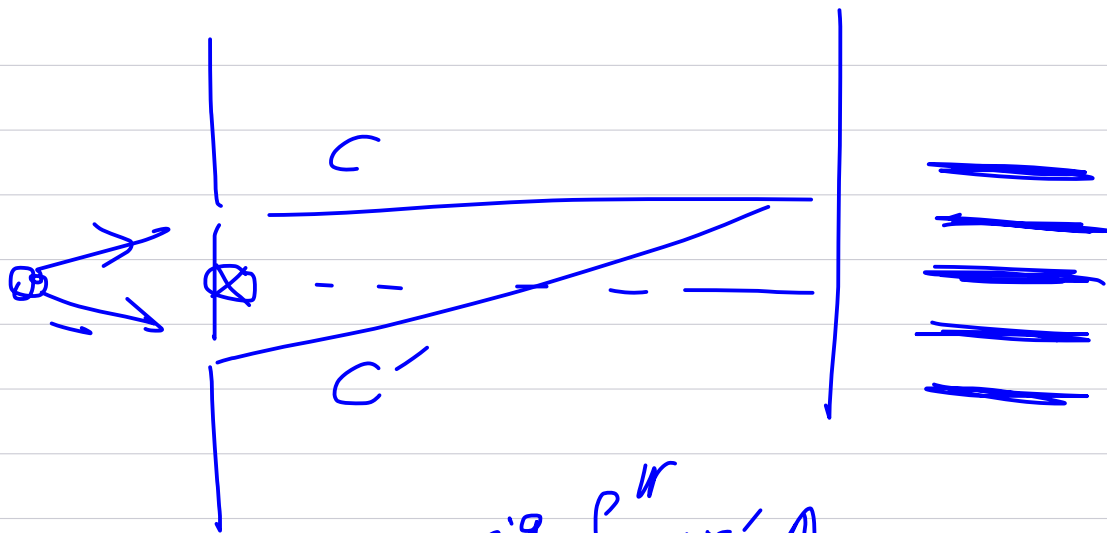
$$x_{\text{max}} \approx \frac{L}{d} \lambda \cdot n$$

$$x_{\text{Min}} \approx \frac{L}{d} \lambda \frac{2n+1}{2}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} e^{i k x} \\ e^{i \frac{2\pi x}{\lambda}} \\ \downarrow \\ \frac{2\pi x}{\lambda} \\ 0 \end{array} \right\}$$

Ora si ripete l'esperimento con un solenoide posto dietro le doppie fessure!



$$\psi_C(r) = e^{\frac{iq}{ch} \int_C^r dr' \cdot A} \psi_0(r)$$

$$\psi_{C'}(r) = e^{\frac{iq}{ch} \int_{C'}^r dr' \cdot A} \psi_0(r)$$

$$\Delta\phi = \frac{q}{ch} \int_{C-C'} dr' \cdot A = \frac{q}{ch} \int_{\square} dr \cdot A$$

$$= \frac{q}{ch} \int_{C'} dS \cdot (\underbrace{\nabla \times A}_{\text{"B"}}) = \frac{q}{ch} \Phi \rightarrow \text{fluxo magnetico!}$$

Interf. pos. x

$$\left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda} + \frac{q\Phi}{ch} \right) = 2\pi n$$

$$\frac{2\pi(d \cdot x)}{\lambda(L)} + \frac{q\Phi}{ch} = 2\pi n$$

$$\therefore x = \frac{L\lambda}{d} \left[n - \frac{q\Phi}{2\pi ch} \right] \quad \left. \begin{array}{l} n=0, 1, 2 \\ \dots \\ \text{spostamento} \\ \text{frange Inter.} \end{array} \right\}$$

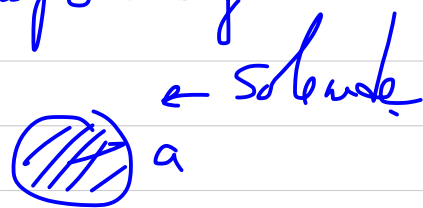
Osservazioni

- I primi risultati sperimentali hanno confermato l'effetto AB.

- L'elettrone si muove in campo mag.

$$B = 0 \quad r > a$$

$$= B \hat{z} \quad r < a$$



\therefore l'elettrone si muove in regime $B=0$. (Beh)
(gwi)

\therefore Ina M.C. non ci deve essere l'effetto.

ma in MQ la potenziale vettore interviene con A

$$\text{e } A \sim O\left(\frac{1}{r}\right) \quad r > a. \text{ Non nullo!}$$

- L'effetto $\propto \oint_{\text{dir.}} A \sim \int dS \cdot (\nabla \times A) = \int dS \cdot B$
 $= \Phi$ gauge invariante!

\dashrightarrow Dattiba (1959 ~ 1987)

- Il solenoide non è ∞

- il campo magnetico non è 100% confinato

- l'elettrone ha una prob. non nulla di penetrare l'interno del solenoide.

- \exists scelta di gauge (Schwinger)

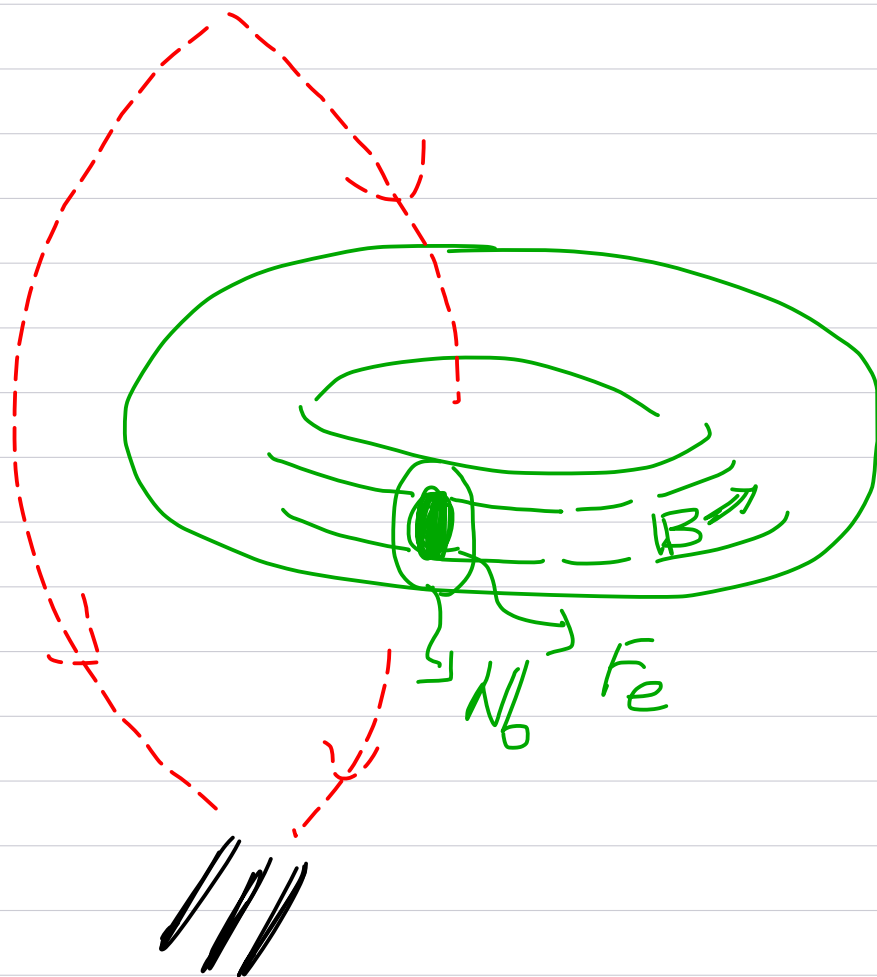
$$A \sim A(F_{\mu\nu}, \partial_{\mu} F_{\nu\lambda}, \dots)$$

(gauge è sigolare!) "0" "0" .. !

Conferma definitiva (Tonomura et al. 1986)

Idea:

Preparare un anello di Fe (un toro)
magnetizzato (B), ricoperto di Nb
che è superconduttore a T , $T < T_c \sim 9.2K$



Osservazioni:

- Obiezione sperimentale ovviata, visto che il solenoide ∞ , senza le estremità!
- L'elettrone schermato
- Quantizzazione del flusso magnetico

$T > T_c$ AB ~~ok~~ no con fasi casuali

$T < T_c$ AB con

$$\Phi_n = \frac{2\pi c \hbar n}{q} = \frac{\pi c \hbar n}{e}, \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$\Rightarrow \Delta\phi^{AB} = \frac{e}{c\hbar} \Phi = \pi n, \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

\Rightarrow Doppia conferma

(1) Effetto AB

(2) Quantizzazione del flusso magnetico (1961)

Deaver, Fairbanks / Doll, Nabauer 1961

N.B. Il fattore 2 cruciale

Quantizzazione del flusso magnetico

Superconduttività (Feynman-Leighton-Sandars, 2005)
Feynman Lectures, II
21-1

Funzione d'onda macroscopica

$$\nabla \times B = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} ; \quad B = \nabla \times A$$

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{4m} \left[\psi^* \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \psi + \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^* \psi^* \cdot \psi \right]$$

$q = -2|e|$ coppia di Cooper

Lo stato superconduttore:

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{-i\theta} \quad \rho = \psi^* \psi = \text{costante}$$

(Condensazione della coppia di Cooper)

$2m = M =$ le masse coppia di Cooper.

$$\Rightarrow \mathbf{j}^0 = \frac{q\rho}{2m} \left(\hbar \nabla \theta - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)$$

Eq. di continuità $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \left(\frac{d\rho}{dt} = 0 \right)$

$\nabla^2 \theta = 0$ nelle gauge $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

$\Rightarrow \theta = 0$ all'interno di suprcond.

$$\Rightarrow \vec{j} = - \frac{q^2 \rho}{2mc} A \quad (\text{Eq. di London})$$

--> Eq. di Maxwell

$$\nabla \times B = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\left(\nabla^2 A = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \right)$$

$$\nabla \times B = \nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$$

$$\nabla^2 A = -\frac{4\pi}{c} (-) \frac{q^2 \rho}{2mc} A = + \frac{2\pi q^2 \rho}{mc^2} A$$

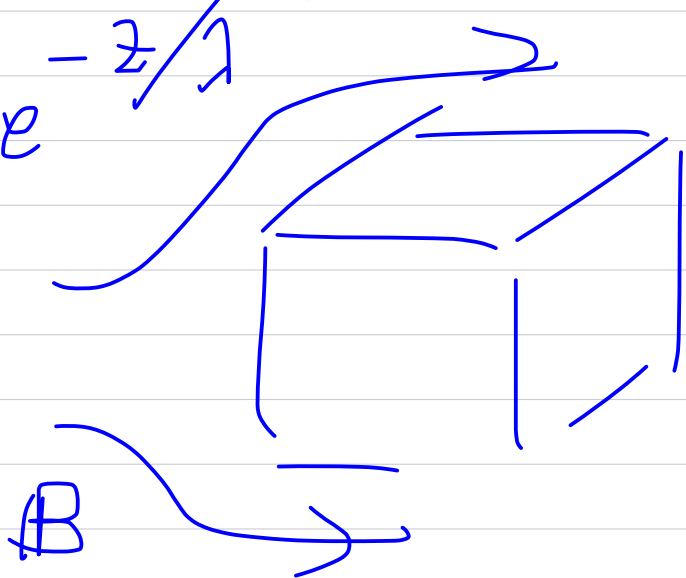
$$\equiv \vec{j}^2 A$$

$\lambda \equiv$ lunghezza di penetrazione di London

$$\equiv m_\gamma^2 \quad (\text{massa del fotone!})$$

$$\therefore A = A_0 e^{-z/\lambda}$$

↓
Campo magnetico
↓ o all'indietro



Effetto "Meissner"

= meccanismo di Higgs-Brout-Englert

$$m_{\gamma} \propto \int \langle \psi^{\dagger} \psi \rangle \int \rho$$

Eq. relativistic

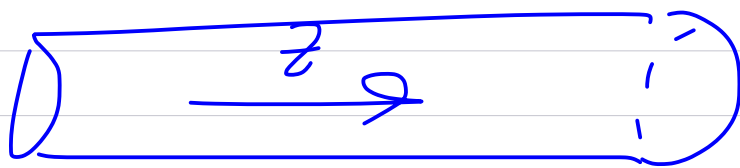
$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) A = 0$$

$$p_0^2 = p^2 + m^2$$

$$\lambda = \left(\frac{2\pi \int \rho q^2}{m c^2} \right)^{1/2} \sim 10^{-5} \text{ cm}$$

(PL) scale
micro-macro

Anello di superconduttore



$$z: 0 \rightarrow T \quad \nabla^2 \theta = 0$$

$$\theta = c z, \quad c = \frac{2\pi n}{T} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Altre $\vec{j} \neq A$ ma

opp

$$\vec{j} = \frac{q\rho}{2m} \left(\hbar \nabla \theta - \frac{q}{c} A \right)$$

$$\nabla^2 \vec{j} = - \frac{q^2 \rho}{2mc} \nabla^2 A = \frac{2\pi q^2 \rho}{mc^2} \vec{j}$$

$\Rightarrow \vec{j}$ è espulso dal superconduttore.

$\Rightarrow \vec{j} = 0$ all'interno del superconduttore!

\therefore all'interno $\hbar \nabla \theta = \frac{q}{c} A$

$$\therefore \frac{q}{c} \oint dx A_i = \frac{q}{c} \int dS \cdot \vec{B} = 2\pi n \hbar$$

$$\Rightarrow \Phi = 2\pi n \hbar c / q \quad ! = \pi n \hbar c / e \quad !!$$

I livelli di Landau

Elettrone in 2D in campo
perp. al piano.

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \quad (q = -e)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A} = (-By, 0, 0)$$

$$H = \frac{1}{2m} \left\{ \left(p_x - \frac{Be}{c} y \right)^2 + p_y^2 \right\}$$

$\Rightarrow [p_x, H] = 0 \Rightarrow$ Autoistati p_x
comuni $\left\{ \begin{array}{l} p_x \\ H \end{array} \right.$

$$\Psi = e^{i p_x y / \hbar} \phi(y)$$

$$H \Psi = E \Psi$$

$$\left[\frac{1}{2m} p_y^2 + \frac{1}{2m} \left(p_x - \frac{Be}{c} y \right)^2 \right] \phi = E \phi$$

$$\left[\frac{1}{2m} p_y^2 + \frac{m\omega^2}{2} \left(y - \frac{c p_x}{e} \right)^2 \right] \phi = E \phi$$

con $\omega = \frac{eB}{mc} =$ frequenza di Larmor !

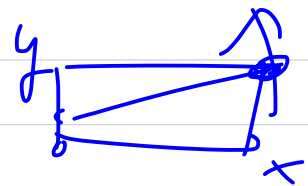
Eq. classico

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{c}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \quad (\mathbf{v} \ll c, \mathbf{B})$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{eB}{mc} \dot{y} = \omega \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega \dot{x} \end{cases}$$

moto circolare

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = -a \sin \omega t \end{cases}$$



$$-\omega^2 a = -\omega^2 a \quad \checkmark$$

$$+a\omega^2 = +a\omega^2 \quad \checkmark \quad) \quad \text{OK.}$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = -r \sin \theta$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r} \sin \theta \dot{\theta}$$

$$- r \cos \theta \dot{\theta}^2 - r \sin \theta \ddot{\theta}$$

$$\dot{y} = -\dot{r} \sin \theta - r \cos \theta \dot{\theta}$$

etc

$$\rightarrow r = 0, \quad \dot{\theta} = \omega = \text{cost.} \quad \text{OK.}$$

Ma questa è oscillatore armonico!

$$E_n = \omega \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{indip. da } \phi)$$

$$\text{e } \Psi = e^{i\phi x/\hbar} \phi_n(y; p)$$

\Rightarrow Ogni livello n è ∞ volte degenerato!

2	=====	!
1	=====	$3\omega\hbar/2$
0	=====	$\omega\hbar/2$

Gauge simmetrica

$$A = \left(-\frac{By}{2}, \frac{Bx}{2}, 0 \right)$$

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_x - \frac{eB}{2c} y \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(p_y + \frac{eB}{2c} x \right)^2$$

$$\left(\hbar = m = \frac{eB}{c} = 1 \right) = \frac{1}{2} \left(-i\partial_x - \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(-i\partial_y + \frac{x}{2} \right)^2$$

$$\left. \begin{aligned} z &\equiv x + iy \\ \bar{z} &= x - iy \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= \frac{z + \bar{z}}{2}, & y &= \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \partial = \partial_z &= \frac{1}{2} (\partial_x - i\partial_y) \\ \bar{\partial} = \partial_{\bar{z}} &= \frac{1}{2} (\partial_x + i\partial_y) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \partial_x &= \partial + \bar{\partial} \\ \partial_y &= i(\partial - \bar{\partial}) \end{aligned}$$

$$[z, \partial_z] = -1; \quad [\bar{z}, \bar{\partial}] = -1$$

$$[\bar{z}, \partial] = [z, \bar{\partial}] = 0$$

Def: $a \equiv \sqrt{2} \left(\partial + \frac{\bar{z}}{4} \right)$ $a^\dagger \equiv \sqrt{2} \left(\bar{\partial} + \frac{z}{4} \right)$

$$\underline{[a, a^\dagger] = 1}$$

$$-i\partial_x - \frac{y}{2} = -i(\partial + \bar{\partial}) - \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$= -i\left(\partial + \bar{\partial} - \frac{z}{4} + \frac{\bar{z}}{4}\right)$$

$$-i\partial_y + \frac{x}{2} = \partial - \bar{\partial} + \frac{1}{4}(z + \bar{z})$$

$$H = \frac{1}{2} \left[-\left(\partial + \frac{\bar{z}}{4} + \bar{\partial} - \frac{z}{4}\right)^2 + \left(\partial + \frac{\bar{z}}{4} - (\bar{\partial} - \frac{z}{4})\right)^2 \right]$$

$$= -\left(\partial + \frac{\bar{z}}{4}\right)\left(\bar{\partial} - \frac{z}{4}\right) + \left(\bar{\partial} - \frac{z}{4}\right)\left(\partial + \frac{\bar{z}}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} (a a^\dagger + a^\dagger a)$$

$$= a^\dagger a + \frac{1}{2} \quad !!$$

Oscillateur harmonique !

$$\omega = \frac{eB}{mc}$$

$$\therefore E_n = \omega \hbar \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

OK !

La dégénérescence

2₀

Lo stato fondamentale

$$a = \sqrt{2} \left(\partial + \frac{\bar{z}}{4} \right)$$

$$a \psi_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\partial + \frac{\bar{z}}{4} \right) \psi_0 = 0$$

$$\psi_0 = e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} = e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$$

Ma $\psi_0^{(m)} \equiv \bar{z}^m \psi_0$ soddisfa

$$\left(\partial + \frac{\bar{z}}{4} \right) \psi_0^{(m)} = 0 \quad \text{anche!}$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots)$$

Funzione d'onda di Laughlin

