

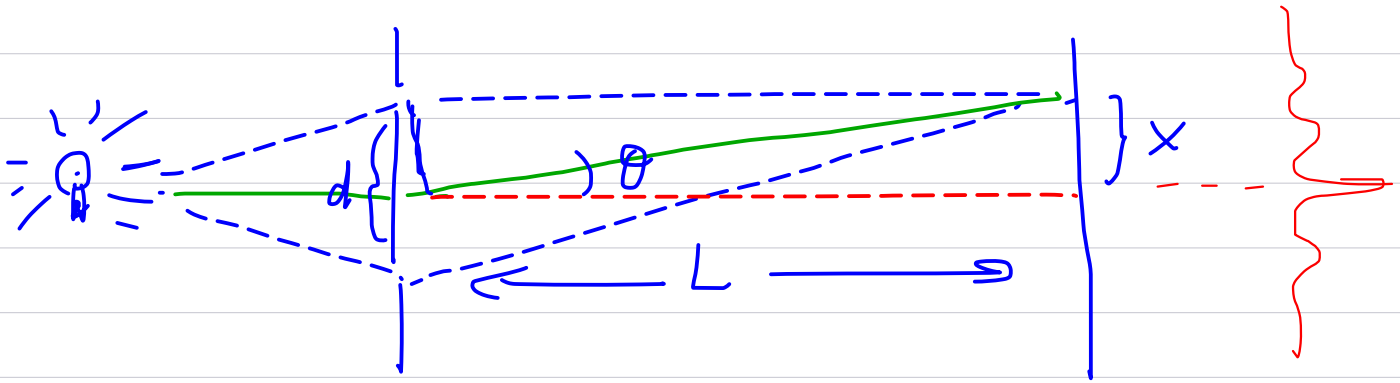
# Comportamenti Non-classici dell'elettrone. 26/09/16

## 1. Elettrone come onda :

diffrazione e interferenza .

○ Luce  $\sim$  onda elettromagnetica .

Esperimento di Young (1803) "A theory of Light and Colours"  
(Royal Soc. )



$$\Delta = 2 \cdot \frac{d}{2} \sin \theta \sim d \cdot \theta \sim d \cdot \frac{x}{L}$$

$$\begin{cases} = \lambda \cdot n, & (n=0, \pm 1, \pm 2 \dots) \Rightarrow \text{Interfer. positiva} \\ = \lambda \cdot \frac{2n+1}{2} & \text{Int. distruttiva} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{L}{d} \lambda \cdot n \quad : \quad \underline{\text{Max}} \text{ fringe interfer.}$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{L}{d} \cdot \lambda \sim \frac{10^{-2}}{10^{-1}} \cdot \underbrace{55 \cdot 10^{-5}}_{\text{luce verde}} \sim 0.5 \text{ mm} \quad \hookrightarrow \text{Fig.}$$

Thomas Young (1773-1829)

Medico, fisico e archeologo inglese

--- assicurazioni a vita ---

- Teoria ondulatoria della luce
- (Legge di Malus); polarizzazione (onde trasversali)  
fr. Onde sonore; fluido

- Corpi elastici.
- Teoria della visione del colore

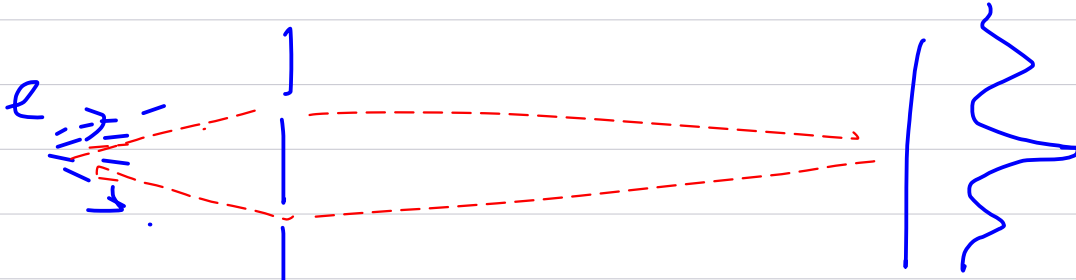
modello di Young ✓

scoperto di astigmatismo.

Newton?

(1643-1727)

# Esperimento di la Tourng con elettroni (Tomura et. al. 1989 !)



Ma questa volta i parametri sono:

$$\Delta x \sim 10^{-4} \text{ mm}, \quad L \sim 1 \text{ m}$$

$$v \sim 0.4 c$$

$$\text{Intensità del fascio: } 10^3 / \text{sec.}$$

$$\Rightarrow \Delta \sim \frac{0.4 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{10^3} \sim 10^7 \text{ cm} \sim 100 \text{ km.} \rightarrow$$

gli elettroni arrivano "uno a uno"

$\rightarrow$  Carattere ondulatorio va attribuito a ogni singolo elettrone; NON a una misteriosa proprietà collettiva del fascio.

$$(\Delta l \sim 1 \mu)$$

larghezza  
pacchetto d'onda

$\rightarrow$  Youtube

100 km.

Ricapitolando:

- ogni singolo elettrone si comporta come onda;
- l'elettrone è una particella (m ben definito).
- $\Rightarrow$  Dualità onda-corpuscolo.

Louis de Broglie (1892-1987)

$$\lambda = \frac{h}{p}; \quad p = \frac{h}{\lambda} \quad (*)$$

$\rightarrow$  impulso

Ten. di dottorato (1924)  $\rightarrow$  premio Nobel

$h \approx 6.10^{-27}$  erg. sec = Costante di Planck

- Dualità onda-corpuscolo (\*) è la proprietà universale di TUTTE le particelle atomiche. (proprietà quantistica)

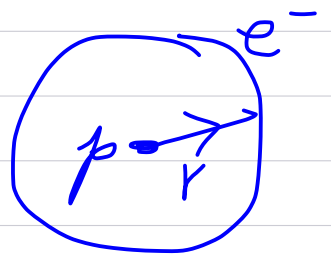
elettrone, protone, neutrone, atomi.

molecole,  $C_{60}$ , ...

macromolecole ...  $\rightarrow$  Buckyball  
Buckminster-Fullerene  
... ??

2. Stabilità e identità di atomi classicanti  $H \sim$  stato legato e-p.

$$m\ddot{r} = -\frac{e^2}{r^2} + m r \dot{\theta}^2 \quad (*)$$



moto stabile ( $r$  cost.)?

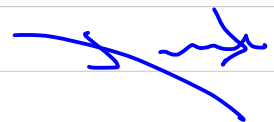
Sì:  $\frac{e^2}{r^2} = m r \dot{\theta}^2 \Rightarrow \dot{\theta} = \left( \frac{e^2}{m r^3} \right)^{1/2}$  Legge Kepler

(moto planetario).

Tutto OK? Non proprio!

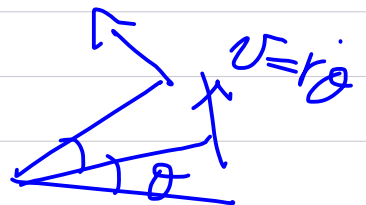
Teo Maxwell  $\Rightarrow$  Particelle cariche in moto accelerato irradiano.

(luce di sincrotrone)



Nel caso (\*),  $r = \text{cost.}$  ma

$$|\ddot{r}| \Rightarrow |\dot{v}| \cdot \dot{\theta} = r \dot{\theta}^2$$



Teo Maxwell  $\Rightarrow$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2e^2 |\ddot{r}|^2}{3c^3} = \frac{2e^2 (r \dot{\theta}^2)^2}{3c^3} = \frac{2e^2}{3c^3} \left( \frac{e^2}{m r^2} \right)^2 \quad (*)$$

$\Rightarrow$  l'elettrone perde l'energia  $\Rightarrow$  Cade verso il centro in moto spirale.

# Stima delle "vite medie"

- Supponiamo che  $r$  varia lentamente.  $\Rightarrow$

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} \quad \begin{array}{c} \text{media su molt. periodi} \\ \nwarrow \quad \downarrow \end{array}$$

Teo del Viriale  $\quad \overline{T} = \frac{1}{2} \overline{r \cdot \nabla V}$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Eq. Mot} \quad m \ddot{r} = - \nabla V \\ m \ddot{r} \cdot r = - r \cdot \nabla V \\ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \Rightarrow - \overline{m \dot{r}^2} = - \overline{r \cdot \nabla V} \\ \Rightarrow \quad \overline{T} = \frac{1}{2} \overline{r \cdot \nabla V} \end{array} \right)$$

Nel caso del moto circolare  $V = -\frac{e^2}{r}$   
Coulombiano

$$\begin{aligned} r \cdot \nabla V &= \frac{e^2}{r} \quad \therefore \\ \overline{\frac{p^2}{2m}} &= \frac{e^2}{2r} \quad \therefore \quad \boxed{\overline{E} = -\frac{e^2}{2r}} \leftarrow \begin{array}{l} \text{(stato)} \\ \text{(legato)} \end{array} \end{aligned}$$

Perciò

$$\frac{dE}{dt} = + \frac{e^2}{2r^2} \dot{r}$$

$$= - \frac{2e^2}{3c^2} \cdot \left( \frac{e^2}{m r^2} \right)^2 \quad !$$

$$\Rightarrow \quad \dot{r} = - \frac{4 e^4}{3 c^3 m^2 r^2} \rightarrow \dot{(r^3)} = - \frac{4 e^4}{m^2 c^3}$$

Verifica dimensioni (c.g.s)

$$\left[\frac{e^2}{r}\right] = [E] = M \frac{L^2}{T^2} \therefore [e^2] = ML^3/T^2$$

$$LHS = \frac{L^3}{T} ; RHS = \left(\frac{ML^3}{T^2}\right)^2 \frac{1}{M^2} \cdot \left(\frac{T}{L}\right)^3 \sim \frac{L^3}{T} \quad OK.$$

Solaz

$$\underset{0}{r^3(T)} - \underset{10^{-8} \text{ cm}}{r^3(0)} = -\frac{4e^4}{m^2 c^3} \cdot T$$

$$\Rightarrow T = \frac{(10^{-8})^3 \frac{m^2 c^3}{4 e^4}}{\frac{(10^{-8})^3 (10^{-27})^2 (3 \cdot 10^{10})^3}{4 (4 \cdot 10^{10})^4}} \sim 10^{-78} \cdot 10^{70} \sim 10^{-8} \text{ sec} \quad !!$$

cfr.  $t^{\text{univ.}} = 10^{10} \text{ ys} \sim 10^{10} \cdot 10^7 \text{ sec.} \sim 10^{17} \text{ sec.}$

Un errore d.  $10^{25}$  !

Una piccola verifica.

Sufficiente assunto che  $r$  sia costante per molte evoluzioni.

↑

$$\therefore \frac{e^2}{r^2} = m r \dot{\theta}^2 \Rightarrow v = r \dot{\theta} = \left( \frac{e^2}{m r} \right)^{1/2}$$

$$\Delta l \sim \left( \frac{e^2}{m r} \right)^{1/2} \Delta t.$$

$$\Delta r \sim \dot{r} \Delta t \sim \frac{e^4}{m^2 c^3 r^2} \Delta t$$

$$\therefore \Delta r / \Delta l \sim \frac{e^3}{m^{3/2} c^3 r^{3/2}} \quad \left( \dot{r} = - \frac{4 e^4}{3 c^3 m^2 r^2} \right)$$

$$\sim \frac{(4 \cdot 10^{-10})^3}{(10^{-27})^{3/2} (3 \cdot 10^{10})^3 r^{3/2}}$$

$$\sim 10^{-30} \cdot 10^{-30} \cdot 10^{40} \frac{1}{r^{3/2}} \sim 10^{-20} / r^{3/2}$$

$$\sim 10^{-8} (r = 10^{-8})$$

$$\sim 1 (r \sim 10^{-13})$$

$\therefore$  Il calcolo ragionevole

✓

In realtà  $r \sim 10^{-8}$  costante.

Com'è possibile?

Bohr: la ragione x cui una particella classica non può avere un raggio fisso:  
L'eq. Newton contiene solo  $m, e$ .

$$\text{ma } [m] = M; [e] = (ML^3/T^2)^{1/2}$$

$\Rightarrow$  Non è possibile che l'eq. del moto abbia una soluzione "caratteristica"

cfr. M.Q.  $\Rightarrow h$  Cost. di Planck

$$[h] = [r \times p] = ML^2/T$$

L'eq. del moto contiene  $m, e, h \Rightarrow$

$$r_B = \frac{h^2}{4\pi m e^2} \sim 10^{-8} \text{ cm}$$

Naturalmente questo non risolve le  
difficoltà dell'instabilità  $\Rightarrow$

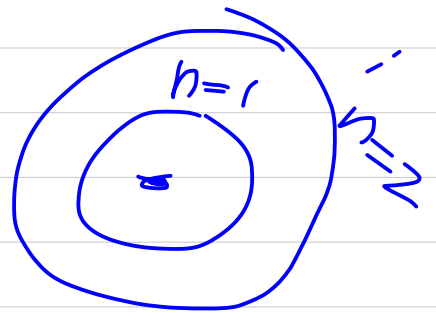
In MQ, i moti periodici sono  
quantizzati.

$$\rightarrow E = E_n \quad (n=1, 2, 3 \dots)$$

$$\text{Atomo di H} \Rightarrow E_n = -\frac{e^2}{2r_B n^2}, \quad (n=1, 2, \dots)$$

L'atomo nello stato più basso

non può irradiare l'energia  
e cadere in uno stato  
più basso (Non esiste!).

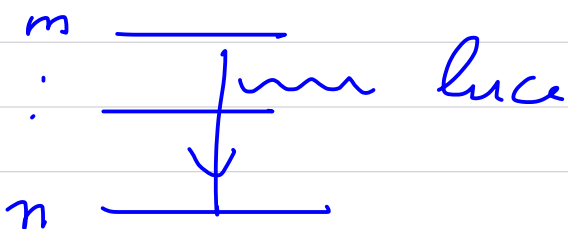


Lo stato fondamentale è stabile.

Ma uno stato eccitato (in un'orbita più alta)?

Non dovrebbe irradiare e decadere?

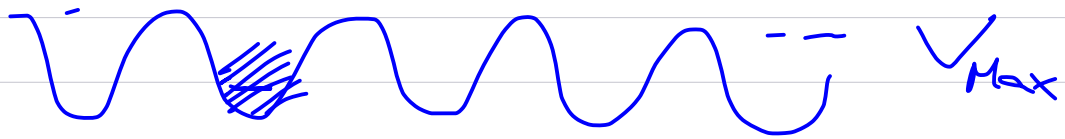
Ipotesi di Bohr (Modello atomico di Bohr)  
~ 1913.



→  
Dopo

### 3. Effetto tunnel.

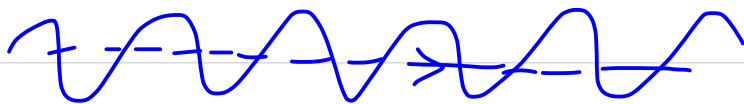
(i) Potential periodico.



Classicamente un elettrone con  $E < V_{Max}$   
sta in una buca (localizzato.)

In MQ (l'elettrone  $\sim$  onda)

l'elettrone con  $E$  appropriata ( $< V_{Max}$ )  
si muove come una particella libera  
(delocalizzata)



(Conduttività elettrica nei metalli!)

(ii) Una barriera di potenziale



Una particella quantistica passa

la barriera con

$$Prob. \sim e^{-\frac{2}{\hbar} \int_a^b dx \sqrt{V(x) - E}}$$

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} : \text{Cost. Planck.} \approx 1.10^{-27} \text{ erg. sec.}$$

(iii) STM  
un atomo Campia un atomo sonde

