Compitino 1 di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
15 novembre 2004 (A.A. 04/05)

Problema 1. Si consideri un sistema a due stati descitto dall'Hamiltoniana

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & -\eta \\ -\eta & E_0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

(i) Rispondere se η può essere complesso (*i.e.*, $\mathrm{Im}\,\eta \neq 0$);

(ii) Determinare gli autovalori e gli autotati di H;

(iii) All'istante $t = 0$, il sistema si trova nello stato

$$|\psi(0)\rangle = \frac{|1\rangle + i\,|2\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

Si determinino le probabilità $P_1(t)$, $P_2(t)$, che all'istante t il sistema si trovi o nello stato $|1\rangle$ o nello stato $|2\rangle$. Fare uno schizzo di $P_1(t)$ e $P_2(t)$.

Problema 2. Una particella di massa m si muove in un potenziale unidimensionale,

$$V(x) = \begin{cases} -g\,\delta(x) & x < a, \\ \infty & x \geq a, \end{cases} \qquad (g > 0). \tag{3}$$

(Fig. 1). Si vuole studiare la proprietà di un eventuale stato legato di energia negativa.

(i) Trovare l'equazione che implicitamente determina l'energia di uno stato legato con $E < 0$. Dalla condizione di esistenza di una soluzione di questa equazione, trovare la condizione (sui parametri, m, g, a) perché il sistema abbia uno stato legato di energia negativa;

(ii) Discutere il limite $a \to \infty$;

(iii) Dire se esistono degenerazioni di autostati di energia nello spettro continuo ($E \geq 0$).

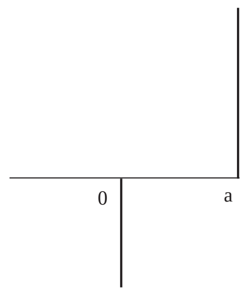

Figura 1:

Soluzione

Problema 1.

(i) No. Se η fosse complesso H non sarebbe Hermitiano. Si noti che non è possibile rendere reali gli elementi non diagonali con una ridefinizione dei vettori di base, poiché l'(12) elemento e l'(21) elemento acquisterebbero fasi opposte. Un'altra maniera ancora: gli autovalori di energia sono complessi, con η complesso.

(ii) Supponendo che $\eta > 0$,

$$|-\rangle = \frac{|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}}; \qquad E_- = E_0 - \eta, \tag{4}$$

è lo stato fondamentale;

$$|+\rangle = \frac{|1\rangle - |2\rangle}{\sqrt{2}}; \qquad E_+ = E_0 + \eta, \tag{5}$$

è lo stato eccitato.

(iii) L'inverso di

$$|1\rangle = \frac{|-\rangle + |+\rangle}{\sqrt{2}}; \qquad |2\rangle = \frac{|-\rangle - |+\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\psi(0) &= \frac{|1\rangle + i\,|2\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|-\rangle + |+\rangle + i\,(\,|-\rangle - |+\rangle\,)}{2} \\
&= \frac{(1+i)\,|-\rangle + (1-i)\,|+\rangle}{2} \quad \Rightarrow \\
\psi(t) &= \frac{(1+i)\,e^{-iE_-t/\hbar}\,|-\rangle + (1-i)\,e^{-iE_+t/\hbar}\,|+\rangle}{2} \\
&= e^{-iE_0t/\hbar}\,\frac{(1+i)\,e^{i\eta t/\hbar}\,|-\rangle + (1-i)\,e^{-i\eta t/\hbar}\,|+\rangle}{2} \\
&= e^{-iE_0t/\hbar}\,\frac{(1+i)\,e^{i\eta t/\hbar}\,(|1\rangle + |2\rangle) + (1-i)\,e^{-i\eta t/\hbar}\,(|1\rangle - |2\rangle)}{2\sqrt{2}} \\
&= e^{-iE_0t/\hbar}\,\frac{(\cos\frac{\eta t}{\hbar} - \sin\frac{\eta t}{\hbar})\,|1\rangle + i\,(\cos\frac{\eta t}{\hbar} + \sin\frac{\eta t}{\hbar})\,|2\rangle}{\sqrt{2}}
\end{aligned} \tag{7}$$

Perciò (Fig. 2)

$$P_1(t) = \frac{1}{2}\,(\cos\frac{\eta t}{\hbar} - \sin\frac{\eta t}{\hbar})^2 = \frac{1 - \sin\frac{2\eta t}{\hbar}}{2}; \tag{8}$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2}\,(\cos\frac{\eta t}{\hbar} + \sin\frac{\eta t}{\hbar})^2 = \frac{1 + \sin\frac{2\eta t}{\hbar}}{2}. \tag{9}$$

Problema 2.

(i) La funzione d'onda ha la forma

$$\psi(x) = \begin{cases} A\,e^{\kappa x}, & x < 0, \\ B\,e^{\kappa x} + C\,e^{-\kappa x}, & x > a. \end{cases} \tag{10}$$

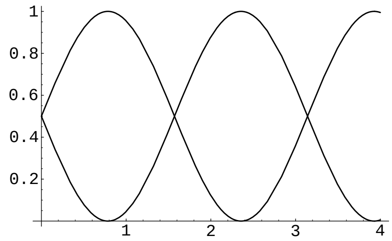

Figura 2:

dove $\kappa = \sqrt{-2mE/\hbar^2} > 0$. La condizione di continuità a $x = 0$ è

$$B + C = A, \tag{11}$$

la condizione di continuità sulla derivata prima a $x = 0$ è

$$\psi'_+ - \psi'_- = -\frac{2mg}{\hbar^2}\,\psi(0), \tag{12}$$

cioè,

$$B - C = (1 - \frac{2mg}{\hbar^2\kappa})A. \tag{13}$$

Combinando queste due si trova

$$B = (1 - \frac{mg}{\hbar^2\kappa})A; \qquad C = \frac{mg}{\hbar^2\kappa}A. \tag{14}$$

La condizione a $x = a$ è

$$\psi(a) = Be^{\kappa a} + Ce^{-\kappa a} = 0. \tag{15}$$

Sostituendo B e C dalla (14), si ha

$$1 - e^{-2\kappa a} = \frac{\hbar^2\kappa}{mg}, \tag{16}$$

per avere una soluzione con $A \neq 0$. Dai grafici delle curve $y = 1 - e^{-2ax}$ e $y = \frac{\hbar^2 x}{mg}$ (Fig. 3) si vede che per $\frac{\hbar^2}{2mg} < a$ esiste una soluzione della (16) con $\kappa > 0$, mentre per $\frac{\hbar^2}{2mg} \geq a$ l'unica soluzione è $\kappa = 0$, che non corrisponde ad uno stato legato.
La (16) può essere scritta alternativamente come:

$$\xi(1 + \coth\xi) = \frac{2mga}{\hbar^2}, \qquad \xi \equiv \kappa a, \tag{17}$$

da cui segue ugualmente la condizione $\frac{2mga}{\hbar^2} > 1$ per l'esistenza di una soluzione non banale per $\kappa > 0$.

(ii) Nel limite $a \to \infty$, $1 - e^{-2\kappa a} \to 1$, perciò la soluzione è

$$\kappa = \frac{mg}{\hbar^2}, \tag{18}$$

che è ben noto risultato per una singola buca delta.

(iii) Non esistono degenerazioni.

Per vedere questo fatto, osserviamo che la funzione d'onda ha la forma (con $k \geq 0$)

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, & x < 0, \\ Ce^{ikx} + De^{-ikx}, & 0 < x < a, \\ 0 & x \geq a. \end{cases} \tag{19}$$

La condizione a $x = a$ ($\psi = 0$) fissa la relazione tra C e D; le condizioni a $x = 0$ determinano A e B in termini di C, per cui per ogni k la soluzione è unica a parte la normalizzazione.

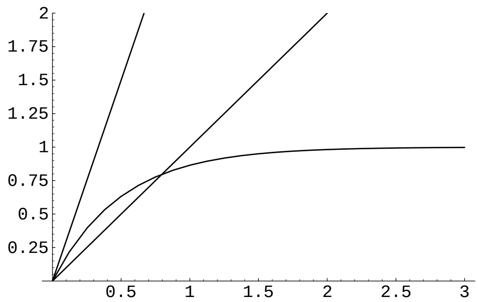

Figura 3: