Compitino 2 di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
21 dicembre 2004 (A.A. 04/05)

Problema 1. Un oscillatore tridimensionale di massa m, carica elettrica q e di spin $\frac{1}{2}$ è sottoposto ad un campo magnetico esterno debole, omogeneo e statico, $(0,0,B)$. L'Hamiltoniana è data da:

$$H = \frac{(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \mathbf{r}^2}{2} - \mu \cdot \mathbf{B}, \qquad \mu = g\,\mathbf{s} = \frac{g}{2}\,\sigma. \tag{1}$$

(i) Considerando prima il caso senza il campo magnetico ($\mathbf{B} = 0$; $\mathbf{A} = 0$), dire quali sono i livelli energetici, qual'è la degenerazione di ciascun livello, e dare i valori possibili del momento angolare orbitale e del momento angolare totale. Rispondere solo per i primi tre livelli energetici.

(ii) Considerate ora il caso con il campo magnetico non nullo, descritto dal potenziale vettoriale,

$$\mathbf{A} = (-\frac{By}{2}, \frac{Bx}{2}, 0). \tag{2}$$

In un'approssimazione in cui i termini quadratici in B sono trascurati (campo debole), dire quali sono gli operatori conservati.

(iii) Sfruttando i risultati dei punti (i) e (ii), trovare gli autovalori esatti dell'energia (sempre nell'approssimazione di campo debole), per i livelli corrispondenti al primo livello eccitato del punto (i).

Problema 2.

Il deutone d è un nucleo di carica $+1$ (composto di un protone (p) e di un neutrone (n)), e ha spin partà, $J^P = 1^+$. Il pione π^- di carica -1 (di spin 0) e il deutone, possono formare una sorta di atomo di "deuterio" (il deuterio normale è un atomo di "idrogeno" con un deutone al posto di un protone come nucleo). Supponiamo che tale sistema si formi, nell'orbita più bassa di Bohr, per breve intervallo di tempo. (Fig. 1).

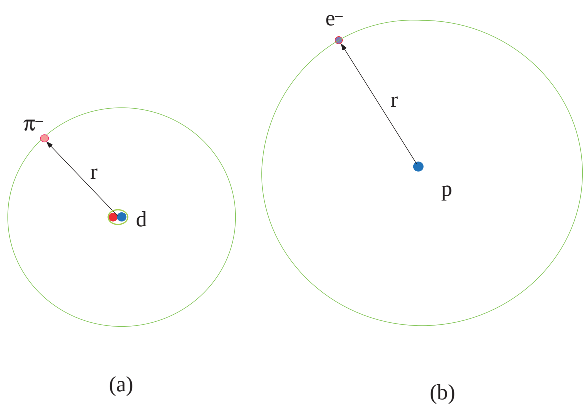

Figura 1: Il sistema considerato nel problema 2 (Fig. 1(a)) e l'atomo di idrogeno (Fig. 1(b)). Le grandezze non sono proporzionali.

i) Determinare il rapporto tra il “raggio di Bohr” di questo sistema, r'_B, e il raggio di Bohr standard (dell’atomo di idrogeno); determinare l’energia di legame di questo sistema. La massa del pione è di circa 139.6 MeV/c^2, quella dell’elettrone circa 0.51 MeV/c^2, mentre la massa del deutone e la massa del protone sono rispettivamente 938.3 MeV/c^2 e 1875.6 MeV/c^2.

ii) A causa delle interazioni elettromagnetiche e forti, questo sistema non è stabile ma decade come

$$\pi^- + d \to n + n. \tag{3}$$

Nel sistema finale si hanno due neutroni (di spin $1/2$). Nel processo (3) sia il momento angolare totale che la parità sono conservati. Dalla considerazione di conservazione di queste quantità nel sistema di riposo del centro di massa delle due particelle, e tenendo conto della statistica di Fermi-Dirac, determinare la parità intrinseca del pione π^-.

iii) Calcolare la distribuzione angolare dei due neutroni nel sistema di riferimento di centro di massa, sapendo che lo stato iniziale era nello stato $J_z = 0$.

Soluzione

Problema 1.

i) I livelli energetici dell'oscillatore 3D sono

$$E_N = \omega \hbar (N + \frac{3}{2}), \qquad N = 0, 1, 2, \dots. \tag{4}$$

Si ha la degenerazione corrispondente ad un insieme di tre numei interi non negativi (n_1, n_2, n_3) tali che

$$N = n_1 + n_2 + n_3, \qquad n_i = 0, 1, 2, \dots \tag{5}$$

oltre ad una doppia degenerazione di ogni livello dovuto allo spin. Il grado di degenerazione allora è data da 2, 6, 12, etc. ed in generale $(N+1)(N+2)$ per il livello N. Vista la parità del livello N, $(-)^N$, e la forma delle funzioni d'onda, i possibili valori di L sono

$$L = N, N-2, \dots, 0(1). \tag{6}$$

Per i primi tre livelli,

1. $N = 0$, $L = 0$, $J = \frac{1}{2}$;
2. $N = 1$, $L = 1$, $J = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$;
3. $N = 2$, $L = 2$ e $L = 0$. Il momento angolare totale prende valori $J = \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.

ii)

In questa approssimazione,

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \mathbf{r}^2}{2} - \frac{eB\hbar}{2mc} L_z - \frac{gB}{2} \sigma_z. \tag{7}$$

Gli operatori $\mathbf{L}^2$, $\mathbf{s}^2$, L_z, s_z e la parità commutano con l'Hamiltoniana.

iii) Gli autostati di H sono gli stati di N, L_z, s_z definiti. Gli autovalori sono

$$E_{N,L_z,s_z} = \hbar\omega(\frac{3}{2} + N) - \frac{eB\hbar}{2mc} L_z - \frac{gB}{2} \sigma_z. \tag{8}$$

Problema 2.

i)

$$\mu = 129.9, \qquad \frac{r'_B}{r_B} = \frac{m_e}{\mu} = \frac{0.51}{129.9} = 0.0039. \tag{9}$$

L'energia di legame è uguale a

$$\frac{e^2}{2r'_B} = \frac{e^2}{2r_B} \frac{r_B}{r'_B} = \frac{13.6}{0.0039} = 3487\,\mathrm{e}V = 3.49\,\mathrm{KeV}. \tag{10}$$

ii) Visto che $\ell = 0$, $s_\pi = 0$, il momento angolare dello stato inizialeè 1. Gli stati possibili di momento angolare dello stato finale, permessi dalla statistica di Fermi-Dirac sono: (a) $S = 0$, $L = 0, 2, 4, \dots$, o (b) $S = 1$, $L = 1, 3, 5, \dots$. L'unica combinazione compatibile con $J_{tot} = 1$ è $[S = 1, L = 1]$. La parità dello stato finale è perciò $-$, che deve essere uguale a

$$P_\pi (-)^0 = P_\pi \tag{11}$$

parità dello stato iniziale. La parità intrinseca di π^- è stata determinata storicamente così.

iii) Con $J_z = 0$, lo stato iniziale è nello stato $(J, J_z) = (1, 0)$. In termini di stati di spin e del momento orbitale finale,

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1,1\rangle \, |1,-1\rangle - |1,-1\rangle \, |1,1\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[Y_{1,1}(\theta,\phi) \, \chi_{1,-1} - Y_{1,-1}(\theta,\phi) \, \chi_{1,1} \right] \tag{12}$$

La distribuzione angolare è

$$P \, d\Omega = \frac{3}{8\pi} \sin^3\theta \, d\theta \, d\phi, \tag{13}$$

$$\int P \, d\Omega = 1. \tag{14}$$